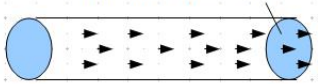
1.2 Die Messung der Ladung

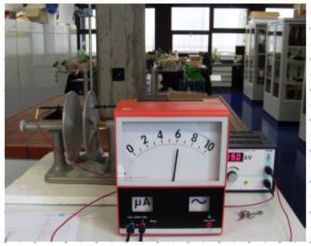
Bekanntes aus der Mittelstufe:



Elektrische Stromstärke:
Darunter versteht man die Ladung, die innerhalb einer bestimmten Zeit durch den Leiterquerschnitt fließt.

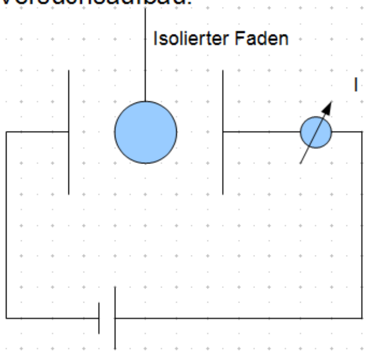
$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Versuch zur Ladungsmessung



Versuchsbeschreibung:
Mit einem graphitüberzog-enen Tischtennisball wird in einem Plattenkonden-sator die Ladung von einer Platte zur anderen übertragen. Dabei wird Stromstärke gemessen.

Versuchsaufbau:



Messdaten:
U= 9,0 kV
I = 6,0 µA
0,25 Sekunden dauert eine Schwingung

Auswertung:
Übertragene Ladung pro Sekunde:

$$Q=I\cdot t$$
$$Q=6{,}0\ \mu A\cdot 1{,}0\ s$$
$$Q=6{,}0\cdot 10^{-6}\ C$$

Ladung der Kugel:

$$Q_{Kugel}=\frac{6{,}0\cdot 10^{-6}\ C}{2\cdot 4}$$
$$Q_{Kugel}=0{,}75\cdot 10^{-6}\ C$$
$$Q_{Kugel}=0{,}75\ \mu C$$

Aufgaben zum elektrischen Feld

Aufgabe 1 - Größenbeziehungen im elektrischen Feld

gegeben:
$$E = 1{,}79 \cdot 10^{-3}\,\frac{N}{C}$$
$$q_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,C$$
$$r = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\,m$$

gesucht: Kraft der Kugel

Lösung:

$$E = \frac{F}{q_2} \Rightarrow F = q_2 \cdot E$$

$$F = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,C \cdot 1{,}79 \cdot 10^{-3}\,\frac{N}{C} = 2{,}69 \cdot 10^{-7}\,N$$

Berechnung der felderzeugenden Ladung

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Auflösen nach q_1

$$q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2}{q_2} \cdot F$$

Einsetzen der Daten:

$$q_1 = \frac{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2} \cdot (5{,}00 \cdot 10^{-2}\,m)^2}{1{,}5 \cdot 10^{-4}\,C} \cdot 2{,}69 \cdot 10^{-7}\,N$$

$$q_1 = 5{,}0 \cdot 10^{-16}\,C$$

Aufgabe 2 - Bandgenerator

$$\tan\alpha = \frac{s}{l} = \frac{0{,}032m}{0{,}35m} = 0{,}09 \Rightarrow \alpha = 5{,}14°$$

$$\tan\alpha = \frac{F_E}{F_G} \Rightarrow F_E = mg \cdot \tan\alpha$$

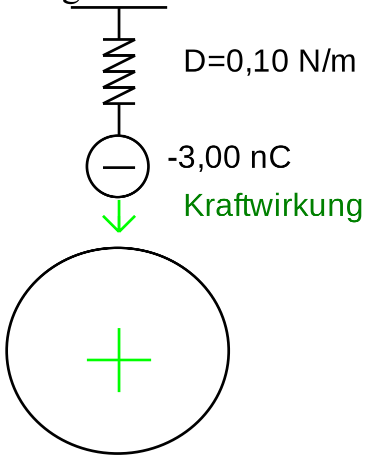
Einsetzen der Daten liefert:

$$F_E = 10{,}0 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{N}{kg} \cdot \tan(5{,}14°) = 8{,}82 \cdot 10^{-3}\,N$$

Berechnung der elektrischen Feldstärke der Bandgeneratorkugel:

$$F = q_2 E \Rightarrow E = \frac{F}{q_2} = \frac{8{,}82 \cdot 10^{-3}\,N}{2{,}00 \cdot 10^{-2}\,C} = 4{,}41 \cdot 10^{-1}\,\frac{N}{C}$$

Verbesserung der Hausaufgabe:
Aufgabe 3a



$$\tan\alpha = \frac{F_E}{F_G} \Rightarrow F_E = mg \cdot \tan\alpha$$

$$F_E = 0{,}010kg \cdot 9{,}81\frac{N}{kg} \cdot \tan(3{,}9°) = 6{,}7 \cdot 10^{-3}\,N$$

Aufgabe 3b

$$E = \frac{F_E}{q_{Kugel}} = \frac{6{,}7 \cdot 10^{-3}\,N}{2{,}50 \cdot 10^{-6}\,C} = 2680\frac{N}{C} = 2{,}7 \cdot 10^{3}\,\frac{N}{C}$$

Weitere Aufgaben
Aufgabe 1

a) Aufgrund der anziehenden Kraftwirkung muss die Band-Generatorkugel positiv geladen sein, weil sich ungleichartige Ladungen anziehen.

b) Berechnung der elektrischen Feldstärke:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{D \cdot s}{q} = \frac{0{,}10\,\frac{N}{m} \cdot 0{,}0300\,m}{3{,}00 \cdot 10^{-9}\,C}$$

$$E = 1{,}0 \cdot 10^{6}\,\frac{N}{C}$$

c) Änderung der elektrischen Feldstärke bei gleicher Kraftwirkung und doppelten Abstand:

$$E = \frac{Q_{Bandgeneratorkugel}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Da die elektrische Feldstärke zum Quadrat des Abstandes indirekt proportional ist, würde die elektrische Feldstärke bei doppeltem Abstand auf ein Viertel sinken.
Damit die Kraftwirkung konstant bleibt, muss man die elektrische Feldstärke vervierfachen.

Verbesserung der Hausaufgabe
Blatt Aufgabe 2
a) Berechnung der Kraft, durch die das Abstoßen verursacht wird.

$$F_E = mg \cdot \tan\alpha$$

$$F_E = 0{,}100\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{N}{kg} \cdot \tan 5{,}00°$$

$$F_E = 0{,}085\,N$$

b) Berechnung der Feldstärke des Generators:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{0{,}085N}{7{,}50 \cdot 10^{-9}C} = 1{,}14 \cdot 10^{7}\,\frac{N}{C}$$

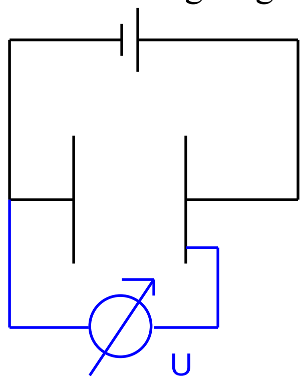
c) Gemäß Formel gilt für radialsymmetrisches Feld:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Damit ist die elektrische Feldstärke direkt proportional zur felderzeugenden Ladung Q. Somit muss man die Kugel des Bandgenerators doppelt so stark aufladen, damit man die doppelte Feldstärke erzielt. Dies wird durch eine höhere Geschwindigkeit des rotierenden Bandes realisiert.

1.6 Spannung und Potential im homogenen Feld

Versuch:
An einem Plattenkondensator werden die Platten auseinandergezogen und dabei die Spannung gemessen:



Beobachtung:
Die Spannung ist direkt proportional zum Abstand der Platten.

Erklärung:
Durch das Auseinanderziehen der Platten wird Arbeit geleistet.

$$W = F_E \cdot s$$

$$W = q \cdot E \cdot s$$

Andererseits gilt für die elektrische Leistung:

$$P = UI$$

Da Arbeit das Produkt aus Leistung und Zeit ist, folgt weiter:

$$W = U \cdot I \cdot t$$

$$W = U \cdot q$$

Damit ergeben sich für die Arbeit zwei Beschreibungen:

$$W = q \cdot U$$

$$W = q \cdot E \cdot s$$

$$\Rightarrow U = E \cdot s$$

Da E aufgrund des homogenen Felds konstant ist ergibt sich also eine direkte Proportion zwischen der Spannung U und dem Abstand s.

Zusammenfassung:

Die elektrische Arbeit in einem homogenen elektrischen Feld wird beschrieben durch:

$$W = q \cdot E \cdot s$$

Dabei beschreibt s die Länge der Verschiebungsstrecke.
Zur Spannung U, die zwischen den beiden Platten gemessen wird besteht die Beziehung

$$U = E \cdot s$$

Kapazität des Kondensators (Fortsetzung)

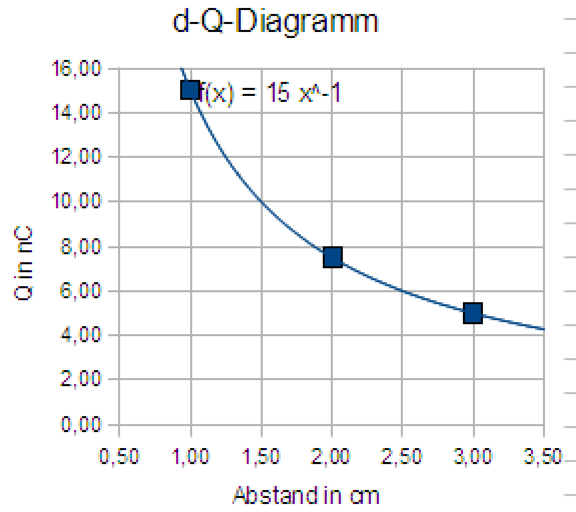
Versuch 2:
Die am Kondensator anliegende Spannung wird auf 200 V fest eingestellt. Der Abstand der Platten zueinander wird durch Abstandhalter verdoppelt bzw. verdreifacht.
Im Anschluss wird die Ladung mit Hilfe einer Messsonde an der positiven Kondensatorplatte abgegriffen.

Es ergibt sich folgende Messtabelle: (siehe Nebenseite)

Ergebnis:
Der Graph im Diagramm ist ein Hyperbelast
=> die Ladung des Kondensators ist indirekt proportional zu dem Abstand der Kondensatorplatten.
=> da U=konstant gewählt wurde ändert sich die Kapazität im gleichen Maße wie die Ladung des Konden- sators.

=> Die Kapazität des Kondensators ist indirekt proportional zum Abstand der parallelen Kondensatorplatten.

	A	B	C	D
1	d in cm	1,00	2,00	3,00
2	Q in nC	15,00	7,50	5,00



Gedankenexperiment:
Bei konstanter Spannung U und gleichem Abstand der Kondensatorplatten wird ein Kondensator mit doppelter Kondensatorfläche mit einem Kondensator mit einfacher Fläche verglichen.

Postulat:
Die Flächenladungsdichte wird konstant gehalten.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q = \sigma \cdot A$$

Entwicklung der Kondensatorladung bei doppelter Kondensatorfläche:

$$A_1 = 2 \cdot A$$

$$\Rightarrow Q_1 = \sigma \cdot 2A = 2\sigma \cdot A = 2Q$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{Q_1}{U} = \frac{2Q}{U} = 2 \cdot \frac{Q}{U} = 2 \cdot C$$

Bei doppelter Kondensatorfläche verdoppelt sich die Kapazität des Kondensators.

Verallgemeinerung auf die n-fache Kondensatorfläche:

$$Q_n = \sigma \cdot n \cdot A = n \cdot Q$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{nQ}{U} = n \cdot \frac{Q}{U} = n \cdot C$$

Die Kapazität eines Kondensators ist direkt proportional zur Fläche der Kondensatorplatten.

Zusammenfassung:
C ist indirekt proportional zu d.
C ist direkt poroprtional zu $\frac{1}{d}$
C ist direkt proportional zu A.

Insgesamt:
C ist direkt proportional zu $\frac{A}{d}$

Merksatz:

> Die Kapazität C eines Plattenkondensators mit der Kondensatorfläche A und dem Plattenabstand d wird bestimmt durch:
>
> $$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Bemerkung:
Mit einem sogenannten Dielektrikum wird die Ladungsdichte um einen Faktor ε_r erhöht. Dieser wird als Permittivität bezeichnet.

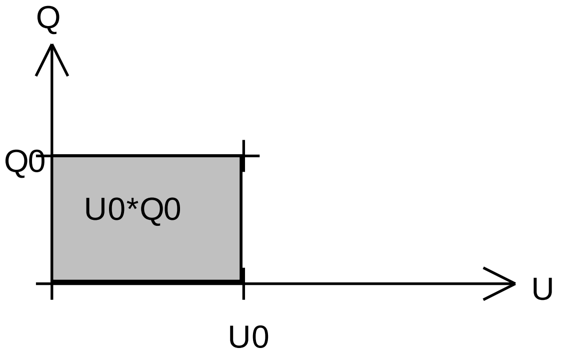
$$Q = \varepsilon_r \cdot \sigma \cdot A = \varepsilon_r \cdot Q_0$$

$$=> C = \frac{\varepsilon_r Q_0}{U} = \varepsilon_r \cdot C_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

2.2 Die Energie eines Kondensators

Herleitung der vom Kondensator aufgenommenen Energie in einem Spannungs-Ladungs- Diagramm

Erstes Beispiel: Elektrische Energie:

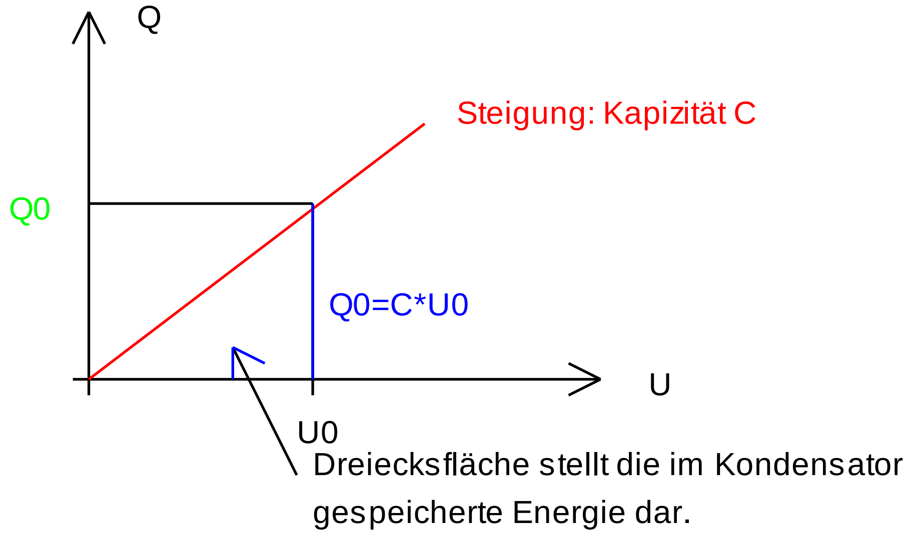


Erkenntnis:

$$E_{el} = U_0 \cdot Q_0$$

Die elektrische Energie ist in dem U-Q-Diagramm der Flächeninhalt unter dem Graphen.

Das U-Q- Diagramm eines Kondensators:



Ziel: Flächeninhalt dieses Dreiecks soll berechnet werden:

$$E_{Kon} = \frac{1}{2} Q_0 \cdot U_0 = \frac{1}{2} C \cdot U_0 \cdot U_0 = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2$$

Merksatz:

Ein Plattenkondensator mit der Kapazität C, an welchem die Spannung U anliegt, besitzt die Energie

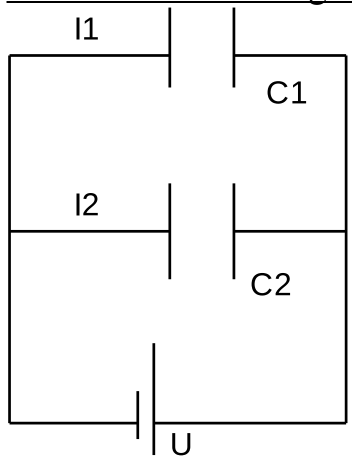
$$E_{kon} = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

2.3 Elektrische Schaltungen von Kondensatoren

Grundwissen:
Es gibt grundlegend zwei Schaltungstypen:
Parallelschaltung
Serienschaltung (Reihenschaltung)

In der Parallelschaltung gilt:
$U = \text{konstant}$
$I = I_1 + I_2$
In der Reihenschaltung gilt:
$U = U_1 + U_2$
$I = \text{konstant}$

Zur Parallelschaltung zweier Kondensatoren:



Ziel: Bestimmung der Gesamtkapazität der Schaltung

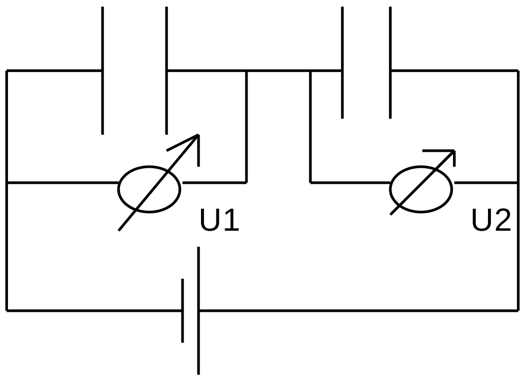
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{It}{U} = \frac{(I_1 + I_2)t}{U} = \frac{I_1 t + I_2 t}{U} = \frac{I_1 t}{U} + \frac{I_2 t}{U}$$

$$= \underbrace{\frac{Q_1}{U}}_{C_1} + \underbrace{\frac{Q_2}{U}}_{C_2} = C_1 + C_2$$

Merksatz:

> In einer Parallelschaltung von Kondensatoren addieren sich die einzelnen Kapazitäten zur Gesamtkapazität:
> $$C = C_1 + C_2$$

Zur Reihenschaltung von Kondensatoren



Ziel: Bestimmung der Gesamtkapazität der Schaltung

$$\frac{1}{C}=\frac{U}{Q}=\frac{U_1+U_2}{Q}=\underbrace{\frac{U_1}{Q}}_{\frac{1}{C_1}}+\underbrace{\frac{U_2}{Q}}_{\frac{1}{C_2}}$$

Insgesamt:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{C_2+C_1}{C_1C_2}$$

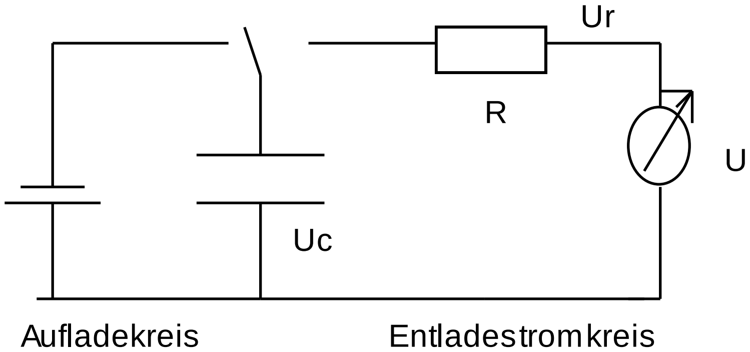
Bildung des Kehrwerts auf beiden Seiten:

$$\boxed{C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}$$

Kapazität einer Reihenschaltung

<u>Die Entladung eines Kondensators</u>

Versuchsaufbau:



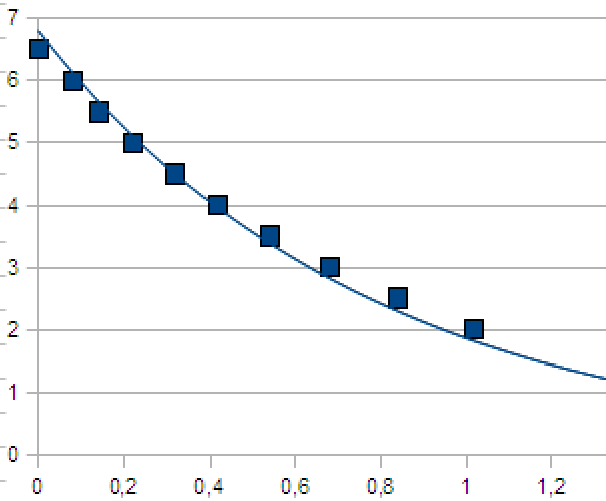
Zur Auswertung wird das Messgeräts des Versuchs gefilmt.

Ergebnis:

Die Spannung fällt beim Entladen des Kondensators exponentiell mit der Zeit t ab.

=> $U = U_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

t in s	U in V
0	6,5
0,08	6
0,14	5,5
0,22	5
0,32	4,5
0,42	4
0,54	3,5
0,68	3
0,84	2,5
1,02	2
1,36	1



Ziel: Bestimmung der Konstanten k in der Gleichung

<u>Auswertung des Versuchs:</u>

Reihenschaltung von Kondensator und Widerstand

$$U = U_C + U_R$$

$$U = \frac{Q}{C} + RI$$

$$U = \frac{Q}{C} + R \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Im Fall der Entladung gilt: U=0. Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{Q}{C} + R \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 0$$

Auflösen der Gleichung nach ΔQ

$$\Delta Q = -\frac{Q}{CR} \cdot \Delta t$$

Differentialgleichung für die Entladung eines Kondensators.

Die Gesamtladung des Kondensators wird beschrieben durch:

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) - \frac{Q(t)}{CR} \cdot \Delta t$$

Ladung zur Zeit t=0 (d.h. die Gesamtladung)

U=6,5 V

C= 50 nF

$R = 1{,}7 \cdot 10^7 \Omega$

$\Delta t = 0{,}100 s$

Berechnung von Q:

$$Q = CU = 50 \cdot 10^{-9} F \cdot 6{,}5V = 3{,}3 \cdot 10^{-7} C$$

$$Q_{ges}(0{,}1s) = 3{,}3 \cdot 10^{-7} C - \frac{3{,}3 \cdot 10^{-7} C}{50 \cdot 10^{-9} F \cdot 1{,}7 \cdot 10^7 \Omega} \cdot 0{,}1s$$

$$Q_{ges}(0{,}1s) = 2{,}91 \cdot 10^{-7} C$$

$$Q_{ges}(0{,}2s) = 2{,}91 \cdot 10^{-7} C - \frac{2{,}91 \cdot 10^{-7} C}{50 \cdot 10^{-9} F \cdot 1{,}7 \cdot 10^7 \Omega} \cdot 0{,}1s$$

$$Q_{ges}(0{,}2s) = 2{,}57 \cdot 10^{-7} C$$

Berechnung der Spannung, die bei der Entladung anliegt:

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow U = \frac{Q}{C}$$

Für die Spannung ergibt sich folgende Näherungsformel

$$U(t + \Delta t) = \frac{Q(t)}{C} - \frac{\frac{Q(t)}{C}}{CR} \cdot \Delta t$$

Die exakte Lösung erfolgt wegen der zugrunde liegenden Differenzialgleichung folgendes Aussehen:

$$\boxed{U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{CR}}}$$

Entladungsspannung des Kondensators

Zusammenfassung: **Gesetze des Kondensators**

Folgende Gesetze beschreiben den Kondensator:

Definition der Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Kapazität eines Kondensators mit Fläche A und Abstand d:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Kondensator mit Dielektrikum:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Energie eines Kondensators:

$$E = \frac{1}{2} C U^2$$

Entladungsspannung eines Kondensators:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

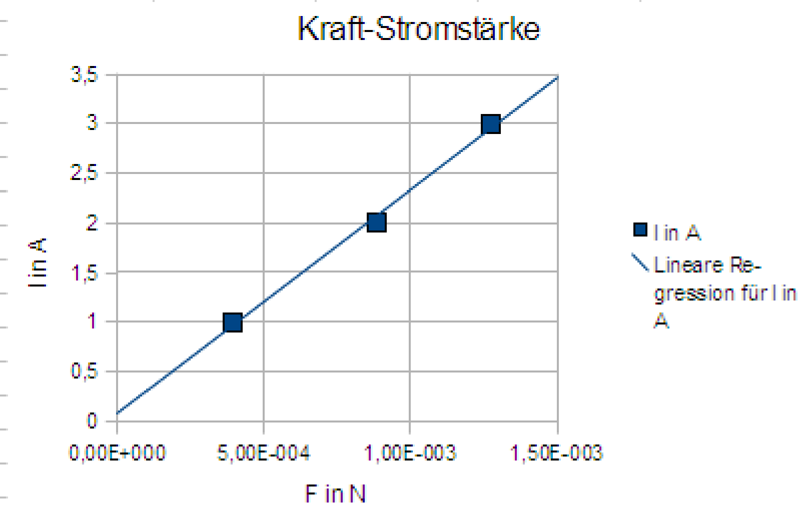
4.2 Die magnetische Flussdichte

Versuchsbeschreibung:
Eine Leiterschleife der Länge l wird in ein Magnetfeld gehalten. Die Leiterschleife ist an einer Waage befestigt, die sich im Gleichgewicht befindet. Wird die Leiter- schleife mit Strom durchflossen, dann übt das Magnet- feld eine Kraft auf die Leiterschleife aus. Diese kann man dann durch das Austarieren der Waage messen.

Messreihe 1:
Bei konstante Länge der Leiterschleife wird die Stromstärke variiert.

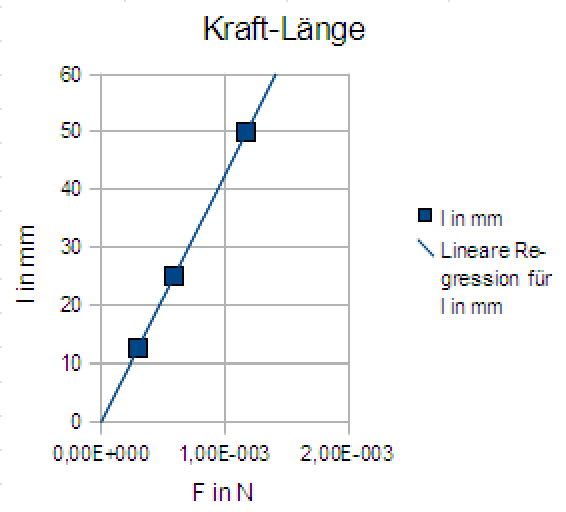
Messreihe 2:
Bei konstanter Stromstärke I wird die Länge der Leiterschleife variierte

	A	B	C	D	E
1	Masse in kg	4,00E-005	9,00E-005	1,30E-004	
2	Kraft in N	3,92E-004	8,83E-004	1,28E-003	
3	I in A	1	2	3	



Ergebnis von Messreihe 1:
Die magnetische Kraft F ist direkt proportional zur Stromstärke, die durch die Leiterschleife fließt.

F in N	2,94E-004	5,89E-004	1,18E-003
l in mm	12,5	25	50



<u>Ergebnis Messreihe 2</u>:
Die Kraft ist direkt proportional zur Länge der Leiterschleife.

Damit gilt insgesamt:

$$\frac{F}{I \cdot l} = \text{konstant}$$

Definition:

Der Quotient aus der bewirkten magnetischen Kraft auf einen Leiter der Länge l, der mit der Stromstärke I durchflossen wird, bezeichnet man als magnetische Flussdichte.

$$B = \frac{F}{I \cdot l}$$