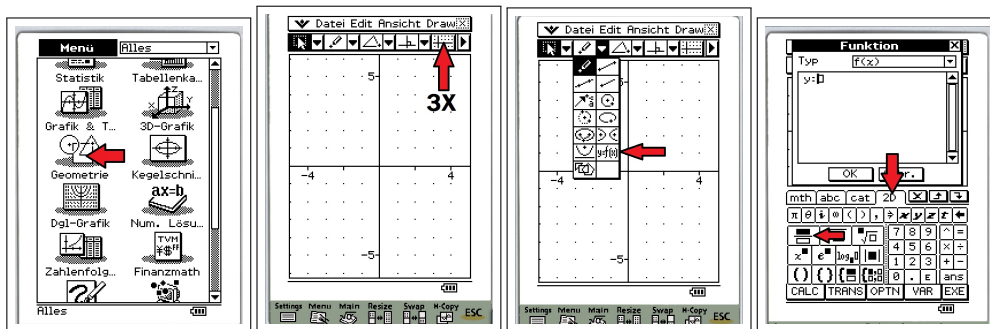


CAS-Einheit: Formen der Funktionsgleichung bei rationalen Funktionen

Die folgende Bildfolie zeigt, wie man Funktionsgraphen mit dem CAS-Rechner zeichnen kann:



Aufgaben

- Lasse mit Hilfe des CAS-Rechners die folgenden Graphen zeichnen.
- Zeichne dann in den Graphen die waagrechte und senkrechte Asymptote im Rechner ein.
- Skizziere in den entsprechenden Feldern auf dem Arbeitsblatt die vom CAS-gezeichneten Graphen sorgfältig.
- Bestimme mit Hilfe der waagrenten und senkrechten Asymptote eine Funktionsgleichung in der Form:

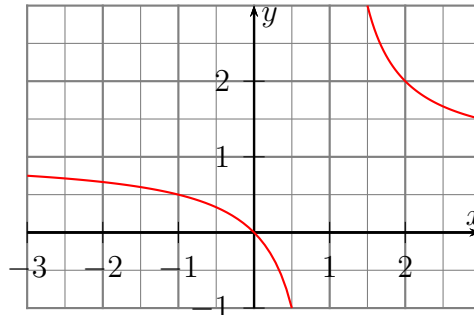
$$f(x) = \frac{c}{x - a} + b$$

- Bestimme mit Hilfe eines passenden Funktionswerts den Wert der Variablen c .

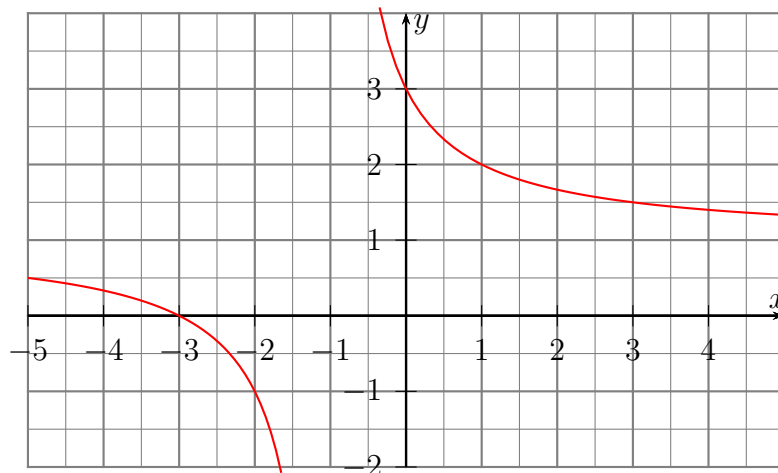
$f(x) = \frac{x}{x - 1}$	$f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$	$f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$	$f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$
.....

Aufgaben zu rationalen Funktionen

1. Das folgende Schaubild zeigt die Graphen einer rationalen Funktion:



- Zeichne die Asymptoten des Graphen in das Koordinatensystem ein.
 - Erstelle einen Steckbrief des Graphen und gib die Funktionsgleichung des Graphens an.
 - Wandle die Funktionsgleichung in die Form $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ um und berechne die Nullstelle des Graphen.
 - Berechne, für welchen x -Wert gilt: $f(x) = -1$
2. In dem folgenden Koordinatensystem ist der Graph eine rationalen Funktion gegeben:



- Zeichne in das angelegte Koordinatensystem die Asymptoten des Funktionsgraphen ein und gib die Gleichungen der Asymptoten an.
- Bestimme mit Hilfe eines geeigneten Funktionswertes den Streckungsfaktor des Funktionsgraphens.
- Erstelle einen Steckbrief des Graphens und ermittle mit dessen Hilfe die Funktionsgleichung des Graphen.

d) Wandle die Funktionsgleichung in die Form $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ um und berechne dann die Nullstelle des Funktionsgraphen.

e) Bestimme durch Rechnung, für welchen x -Wert gilt: $f(x) = 1,5$

3. Eine rationale Funktion ist durch die folgende Zuordnungsvorschrift

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{2}{x - 2} - 1$$

gegeben.

a) Bestimme mit Hilfe des Funktionsterms die Gleichungen der Asymptoten des Funktionsgraphen.

b) Erstelle einen Steckbrief für den Funktionsgraphen mit Hilfe des Funktionsterms.

c) Zeichne ohne explizit eine Wertetabelle anzulegen den Graphen der Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

d) Berechne die Nullstelle der vorgegebenen Funktion.

4. Gegeben ist eine rationale Funktion durch die Zuordnungsvorschrift

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$$

a) Stelle die Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{c}{x - a} + b$ dar

b) Ermittle die Gleichungen der Asymptoten des Funktionsgraphen und gegebenenfalls den Streckfaktor a .

c) Zeichne aufgrund der bisher erhaltenen Ergebnisse den Funktionsgraphen in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

d) Berechne die Nullstelle des Funktionsgraphen.

5. Gesucht wird jeweils eine Funktion, welche die nachstehenden Eigenschaften besitzt:

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $x = 3$ ist die Nullstelle der Funktion.

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ und $\mathbb{W} =] - 1; +\infty[$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus -4$ und $\mathbb{W} =] - \infty; 2[$

Gib für alle Fälle jeweils eine passende Funktionsgleichung an und begründe deine Entscheidung.

Aufgaben zu rationalen Funktionen und Bruchtermen

1. Berechne die Summe der folgenden Bruchterme. Stelle dazu erst durch geschicktes Ausklammern einen Hauptnenner her:

a) $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{2x+6}$

e) $\frac{3}{x-4} + \frac{x-2}{x^2+4x}$

b) $\frac{x+5}{2x^2+6x} + \frac{4}{3x+9}$

f) $\frac{4}{2x-3} + \frac{2x-3}{4x^2+6x}$

c) $\frac{4x}{x^2-4x} + \frac{3}{2x+8}$

g) $\frac{x-3}{x^2-6x} + \frac{2}{2x-12}$

d) $\frac{2}{8x-16} + \frac{x}{x^2-2x}$

h) $\frac{3x-2}{2x^2-4x} + \frac{2}{4x-8}$

2. Gegeben ist eine rationale Funktion durch die Summe der folgenden Bruchterme:

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{x-1}{2x+4}$$

- a) Stelle die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ her und berechne die Schnittpunktkoordinaten des Funktionsgraphen dieser Funktion mit den Koordinatenachsen.
- b) Zeige, dass $x = -2$ eine senkrechte Asymptote des Funktionsgraphen darstellt und ermittle durch ein geeignetes Verfahren die Asymptotengleichung des waagrechten Asymptote.
- c) Zeichne den Graphen der Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
3. Faktorisiere Zähler und Nenner der folgenden Bruchterme. Fasse die gekürzten Bruchterme als Funktionsterme auf und zeichne der Graphen jeweils nach Ermittlung der Asymptotengleichungen ihre Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem ein:

a) $\frac{2x-4}{x^2-2x}$

d) $\frac{2x}{2x^2+6x}$

b) $\frac{2x-8}{(x-4)^2}$

e) $\frac{x-3}{x^2-3x}$

c) $\frac{x^2}{x^3-4x^2}$

f) $\frac{2x-4}{x^2-2x}$

Wiederholungsaufgaben zur Vertiefung

1. Löse die folgenden Bruchgleichungen mit einem algebraischen Lösungsverfahren. Ermittle zu dem die Definitions- und die Lösungsmenge:

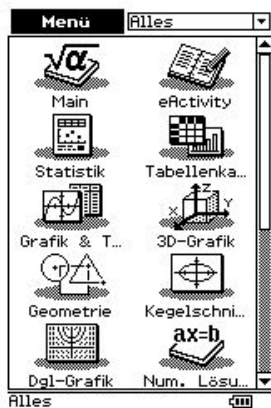
a) $\frac{x-2}{x^2-3x} + \frac{2}{x-3} = \frac{1}{2x}$

b) $\frac{2x-x}{x^2-4x} + \frac{3}{2x-8} = \frac{1}{4x}$

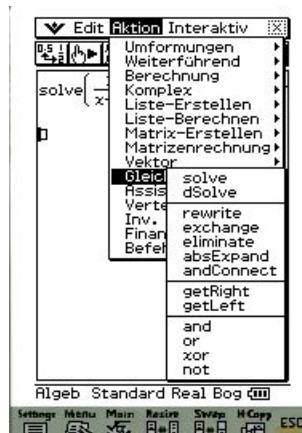
c) $\frac{3}{4x-8} - \frac{2x-4}{2x^2-4x} = \frac{2}{3x}$

d) $\frac{1}{6x-6} + \frac{2x-5}{x^2-x} = \frac{1}{6x}$

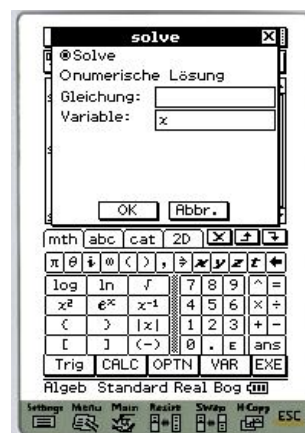
Die Bruchgleichungen kannst du durch das Computeralgebrasystem des CAS-Rechners kontrollieren:



Wähle main

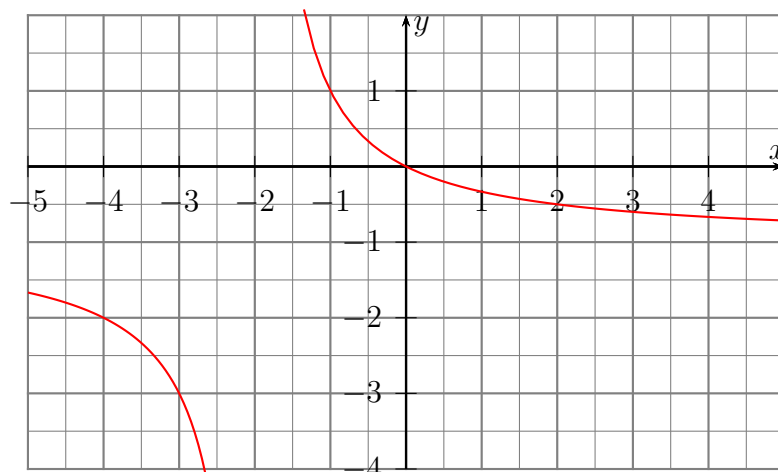


Wähle Interaktiv -> Gleichung -> solve



Gib die Gleichung in das Dialogfenster ein

2. In einem Koordinatensystem ist der Graph einer rationalen Funktion gegeben:



- a) Ermittle mit Hilfe eines geeigneten Steckbriefs des Graphens, der Verschiebungen und Stauchungen des Graphens gegenüber $g(x) = \frac{1}{x}$ enthält, die Funktionsgleichung.

- b) Zeichne in das angelegte Koordinatensystem den Graphen der Funktion

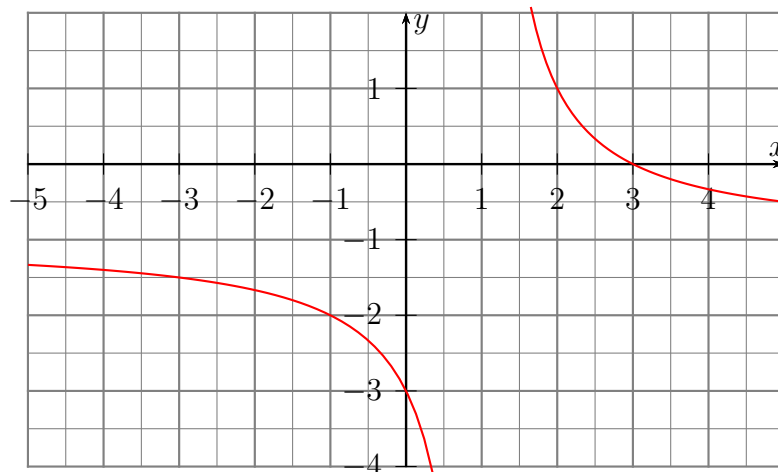
$$h(x) = \frac{1}{x-1} - 1$$

ein.

- c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes beider Funktionsgraphen.

Übungsplan zum Wiederholen und Vertiefen

1. In einem Koordinatensystem ist der Graph einer rationalen Funktion gegeben:



- a) Ermittle mit Hilfe eines geeigneten Steckbriefs des Graphens, der Verschiebungen und Stauchungen des Graphens gegenüber $g(x) = \frac{1}{x}$ enthält, die Funktionsgleichung.

- b) Zeichne in das angelegte Koordinatensystem den Graphen der Funktion

$$h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$$

ein.

- c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes beider Funktionsgraphen und überprüfe das Ergebnis graphisch.

2. Berechne die Summe der folgenden Bruchterme:

a) $\frac{x-x^2}{x^2-2x} + \frac{x-3}{x-2} - \frac{3}{2x-4}$

b) $\frac{x-4}{2x^2-8x} + \frac{x-3}{x-4} - \frac{3}{3x-12}$

c) $\frac{x-3}{4x^2-8x} + \frac{3x-3}{3x-6} - \frac{3x}{2x-4}$

3. Löse die folgenden Bruchgleichungen mit einem algebraischen Verfahren und bestimme jeweils die Definitions- und die Lösungsmenge:

a) $\frac{x-4}{2x^2-8x} + \frac{2}{3x-12} = \frac{1}{6x}$

b) $\frac{x-4}{3x^2-3x} + \frac{2}{4x^2-4x} = \frac{1}{x-1}$