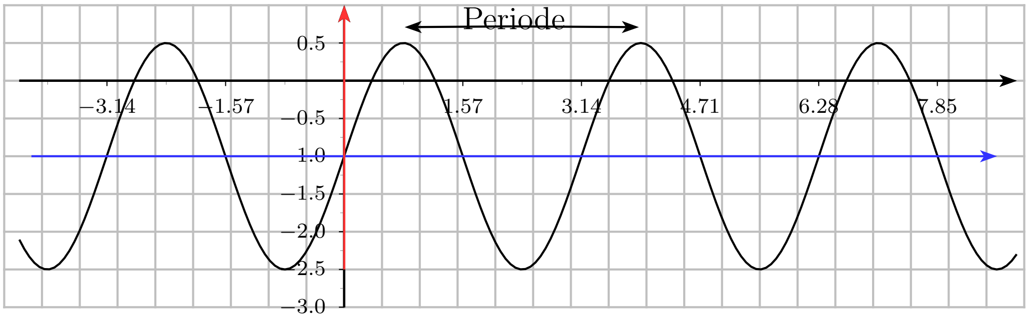
Lösungen zu den Aufgaben Trigonometrie 10

von
StR Markus Baur
Werdenfels-Gymnasium

Lösungen Aufgaben zur Trigonometrie

Aufgaben zur allgemeinen Sinusfunktion

1. Bestimmen der Funktionsgleichungen aus dem Funktionsgraphen



a) Aus der Graphik kann man die folgende Eigenschaften ablesen:

- Periodenlänge $p = \pi$
- Amplitude $a = \frac{3}{2}$
- Verschiebung um 1 nach unten

Aus diesen Daten lassen sich die folgenden Parameter der Funktionsgleichung bestimmen:

- $a = \frac{3}{2}$
- $p = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$
- $c = 0$
- $d = -1$

Dies setzt man in die allgemeine Funktionsgleichung ein:

$$f\,:\,x \mapsto f(x) = a\sin(b(x+c)) + d$$

Mit den oben ermittelten Daten ergibt sich:

$$f\,:\,x \mapsto f(x) = \frac{3}{2}\sin 2x - 1$$

b) Nullstellen des Funktionsgraphen:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{3}{2}\sin 2x - 1 = 0$$

$$\sin 2x = \frac{2}{3}$$

Dies bedeutet, dass gelten muss

$$2x = 0{,}730 \Rightarrow x = \frac{0{,}730}{2} = 0{,}365$$

Die Nullstellen wiederholen sich pro Periode, wodurch sich der folgende Term ergibt:

$$x_k = 0{,}365 + k \cdot \pi$$

k ist eine ganze Zahl Eine zweite Möglichkeit für die Nullstellen gilt:

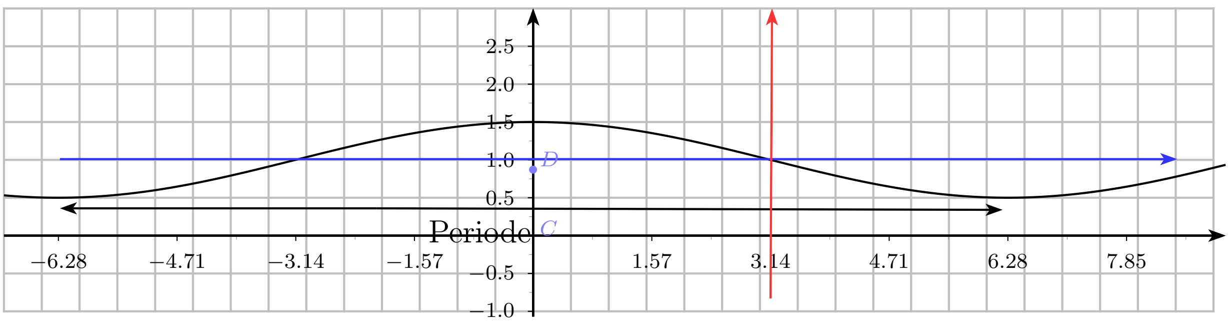
$$\sin x = \sin(\pi - x) \Rightarrow \sin(\pi - 0{,}730) = \frac{2}{3}$$

$$2x = \pi - 0{,}730 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 0{,}365$$

Auch diese Nullstellen wiederholen sich mit der Periodenlänge

$$x_k = -\frac{\pi}{2} - 0{,}365 + k \cdot \pi$$

2. Bestimmung der Funktionsgleichung aus dem Funktionsgraphen:



Aus der Graphik kann man die folgenden Daten ermitteln:

a) Amplitude des Funktionsgraphen $a = \frac{1}{2}$. Die Periodenlänge beträgt $p = 4\pi$

b) Die Verschiebungen gegenüber der Graphen $f(x) = \sin x$

- Verschiebung in x-Richtung: $x = \pi$ nach rechts
- Verschiebung in y-Richtung: $y = 1$ nach oben

c) Bestimmung der Funktionsgleichung

$$f : x \mapsto f(x) = a \sin(b(x + c)) + d$$

Aus den oben geleisteten Vorarbeiten kann man nun die Parameter der Funktionsgleichung bestimmen:

- $a = \frac{1}{2}$
- $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$
- $c = -\pi$
- $d = 1$

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right) + 1$$

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

3. Zeichnung des Funktionsgraphen

$$f(x) = 3\sin(3x + \pi) - 3$$

Um die chrakteristischen Merkmale des Graphen bestimmen zu können muss in dem Argument des Sinus zunächst die 3 ausgeklammert werden:

$$f(x) = 3\sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 3$$

a) Steckbrief des Graphen

- Ermittlung der Periodenlänge:

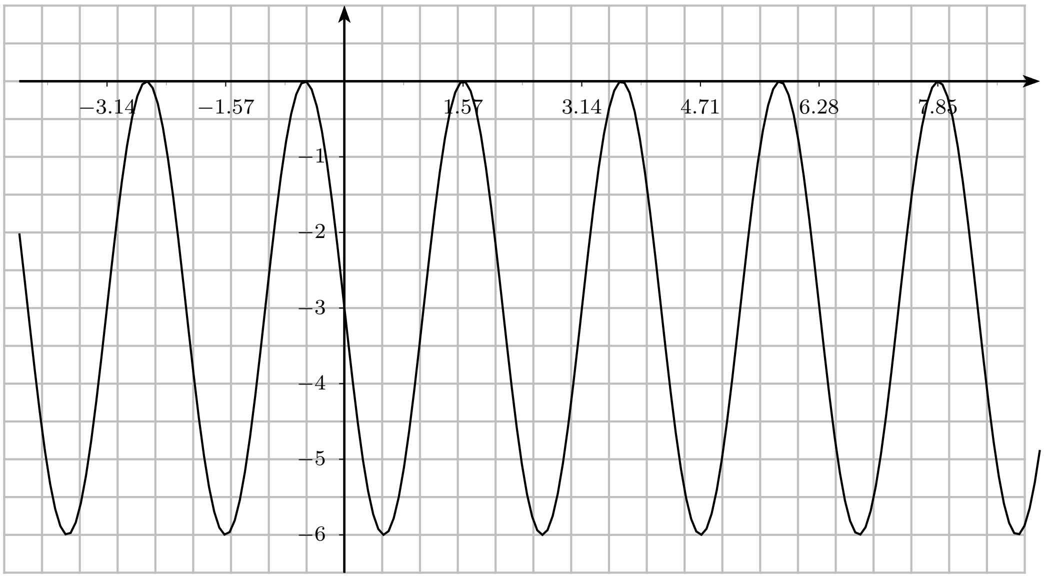
$$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

- Bestimmung der Amplitude

$$a = 1$$

- Der Graph ist um $\frac{\pi}{3}$ gegenüber dem Graphen der Sinusfunktion nach links verschoben.
- Der Graph ist um 3 gegenüber dem Graphen der Sinusfunktion nach unten verschoben.

b) Zeichnung des Graphen



c) Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin(3x + \pi) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 3x + \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$$

Weil die Nullstellen die Maxima des Graphen darstellen, sind die Nullstellen jeweils im Abstand einer Periodenlänge zueinander, was zu der allgemeinen Nullstellenangabe führt, wenn k eine ganze Zahl ist:

$$x_k = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

4. Bestimmung der Funktionsgleichung

a) Aus der Graphik erkennt man, dass die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{3}$ ist. Die Amplitude beträgt $a = -2$, da der Graph gegenüber dem Graphen der Sinusfunktion an der x-Achse gespiegelt ist.

b) Der Graph ist gegenüber dem Graphen der Sinusfunktion um 1 nach unten verschoben.

c) Aus den Ergebnissen lassen sich die Parameter der allgemeinen Funktionsgleichung

$$f(x) = a\sin(b(x + c)) + d$$

bestimmen:

- $a = 2$

- $b = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$
- $c = 0$
- $d = -1$

Damit lautet die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -2\sin(3x) - 1$$

d) Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2\sin(3x) = 1 \Rightarrow \sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{7}{6}\pi \Rightarrow x = \frac{7}{18}\pi$$

Damit lautet die erste allgemeine Lösung

$$x_k = \frac{7}{18}\pi + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Andererseits gilt:

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \Rightarrow \sin\left(\pi - \frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{18}\pi$$

Damit lautet die zweite allgemeine Lösung für die Nullstellen:

$$x_k = -\frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

wobei k eine ganze Zahl ist.