Musterprüfung Mathematik 2012

Analysis – Wahrscheinlichkeit und Statistik– Analytische Geometrie

von

Markus Baur

Mathematik Musterprüfungsaufgabe 2012
Infinitesimalrechung

Teil 1

1. Gegeben ist die folgende gebrochen- rationale Funktion:

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{3x-3}{x^2-1}$$

   a) Bestimme die maximale Definitionsmenge und diskutiere das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs.

   b) Bestimme einen möglichst einfachen Term für die Ableitung und untersuche das Monotonieverhalten der Funktion.

2. Zeige, dass die Funktion

$$F: x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

eine Stammfunktion zu der Funktion

$$f: x \mapsto f(x) = x^2 \ln x$$

ist.
Bestimme außerdem eine Stammfunktion so, dass gilt $F(1) = \frac{8}{9}$.

3. Zeige, dass durch das Integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$$

eine endliche Fläche ausgedrückt wird und ermittle den Wert, durch den diese Fläche begrenzt wird.

4. Das Wachstum einer Kanninchen- Population wird von einem Biologen untersucht. Im Jahr 2003 ermittelt er eine Gesamtzahl von 500 Kanninchen. Im Jahr 2008 war die Population auf 650 angewachsen. Die Entwicklung der Population kann näherungsweise mit der Funktion

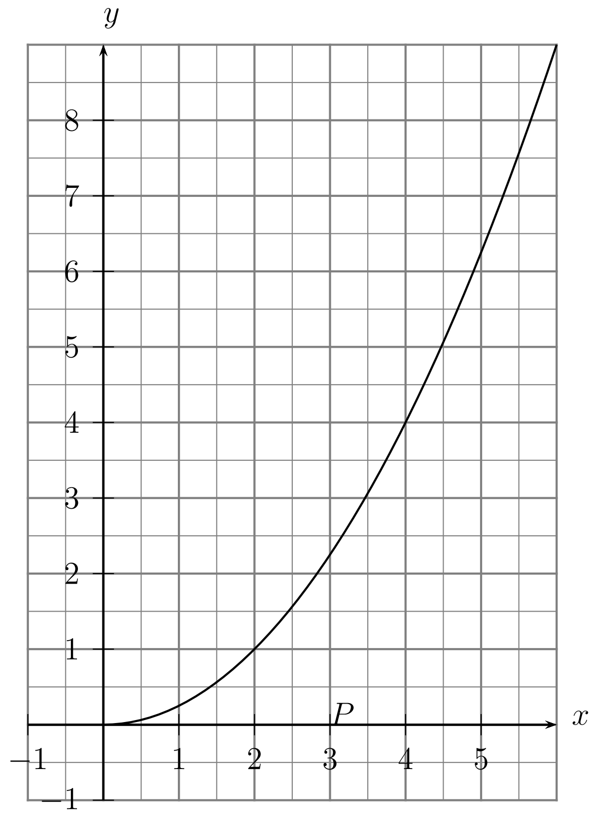
$$P: t \mapsto P(t) = 700 - a \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot(t-2003)}$$

Ermittle die Werte für die Parameter a und k und zeige außerdem, dass es sich um ein nach oben begrenztes Wachstum handelt.

Mathematik Musterprüfungsaufgabe 2012
Infinitesimalrechung

Teil 2

1. Auf einer Landkarte wird der Verlauf einer Eisenbahnstrecke durch einen Parabelast beschrieben:



Am Punkt $P(3|0)$ befindet sich ein Bahnwärterhäuschen.

a) Bestimme den Term der quadratischen Funktion, der den Verlauf der Eisenbahnlinie beschreibt.

b) Ein Zug befindet sich am Punkt $Q(2|f(2))$. Berechne den Abstand zum Bahnwärterhäuschen und zeige, dass der Abstand zwischen dem Punkt $Q_x(x|f(x))$ allgemein durch den Term

$$d(x) = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 6x + 9}$$

beschrieben wird.

c) Berechne die Koordinaten des Punktes Q_0 so, dass der Abstand zwischen dem Zug und dem Bahnwärterhäuschen minimal wird.

d) Ein Feldweg verläuft geradlinig und parallel zur $x-$Achse im Abstand 5. Ermittle den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen dem Feldweg und der Eisenbahnlinie eingeschlossen wird.

2. Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin(2x)$$

a) Zeige, dass die Nullstellen der Funktion mit den Nullstellen der Funktion $g(x) = \sin(2x)$ identisch sind.

b) Zeige, dass die Funktion f für $x \to \infty$ einem festen Grenzwert anstrebt und ermittle diesen.

c) Weise nach, dass die lokalen Extremstellen der Funktion f gegenüber den lokalen Extremstellen der Funktion g verschoben sind.

d) Beweise, dass durch die Funktion

$$F(x) = -\frac{1}{17} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(2\sin(2x) + 8\cos(2x)\right)$$

eine Stammfunktion von $f(x)$ gegeben ist.

e) Weise zusätzlich nach, dass das Integral

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

einen endlichen Wert besitzt.

Mathematik **Musterprüfungsaufgabe** **2012**
Wahrscheinlichkeitrechnung und Statistik

1. Die Zulassungsstelle des Landkreises Garmisch- Partenkirchen vergibt Autonummern. Dabei werden nach dem Ortskennzeichen GAP bis zu zwei Buchstaben und genau drei Ziffern vergeben.

   a) Ermittle durch Berechnung, wie viele unterschiedliche Kennzeichen die Zulassungstelle vergeben kann, wenn die Bestimmung der Buchstaben und Ziffern rein zufällig erfolgt. Dabei darf die Null aber nicht auf der Hundertstelle bei dem Ziffernblock stehen.

   b) Herr Meister möchte bei seinem Kennzeichen entweder die Doppelbuchstabenkombination aus den Buchstaben M, N und S, wenn dies nicht möglich ist soll der erste Buchstabe ein A sein und der zweite Buchstabe rein zufällig gewählt sein. Die Zahl des Kennzeichens soll aus den Ziffern 4,6 und 6 bestehen, wobei jede Ziffer nur einmal vorkommen darf. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Meister ein solches Kennzeichen erhält.

2. Beim Schafkopfspiel wird mit 32 Karten gespielt. Dabei sind unter den Karten 4 Asse und 4 Unter. Jeder der Spieler erhält zufällig 8 Karten.

   a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Kunz beim Schafkopfspiel genau zwei Unter erhält.

   b) Herr Kunz spielt einen Venz (nur Unter sind Trumpf), wenn er mindestens 3 Asse und mindestens 3 Unter bei der Ausgabe der Karten erhält. Ermittle wie wahrscheinlich es ist, dass Herr Kunz einen Venz spielt.

3. Der Grundkurs m1 hat genau 20 Teilnehmer. Der Kursleiter StD Kleinkarriert weiß aufgrund langjähriger Erfahrung, dass 5% einer Grundkursstunde fernbleiben.

   a) Berechne mit welcher Wahrscheinlichkeit bei der nächsten Grundkursstunde mehr als zwei, aber weniger als 6 Schüler dem Unterricht fernbleiben.

   b) Erfahrungsgemäß liefern 10% der Schüler keine Entschuldigung. Ermittle, wie viele Absenzenkarten der Oberstufenkoordinator StD G. mindestens kontrollieren muss, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% einen unentschuldigten Schüler bei seiner Missetat ertappt.

   c) Der alarmierte Schulleiter OStD B. ist der Ansicht, dass mindestens 15% der Schüler unentschuldigt fehlen. Er ordnet daher an. dass Oberstufenkoordinator StD G. die letzten 200 Absenzen abermals auf Entschuldigungen überprüfen soll. Bestimme eine Entscheidungsregel, damit StD G. die These des Schulleiters OStD B. mit höchstens 5% irrtümlich ablehnt. In Wahrheit stimmt die These des erfahrenen Oberstufenkoordinators StD G. Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Testergebnis trotzdem für die These des Schulleiters OStD B. spricht.

4. Auf einem Park and Ride- Parkplatz sind 125 Fahrzeuge geparkt. Darunter befinden sich 34 Personenkraftwagen des Fabrikats VW- Golf, darunter 17 rote. Eine Luftaufnahme des Parkplatzes ergibt, dass 40 von den auf dem Parkplatz abgestellten Fahrzeugen rot lakiert ist.

   a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Auto weder rot noch ein VW- Golf ist.

   b) Untersuche die Ereignisse VW- Golf und Fahrzeug ist rot lackiert auf stochastische Unabhängigkeit.

Die Aufgaben orientieren sich an der Grundkursklausur vom 27.06.2006

Mathematik Musterprüfungsaufgabe 2012
Analytische Geometrie

1. Der Hang einer Skipiste wird durch die Ebene mit der Geichung $x_2 - 3x_3 = 0$ modelliert. Das Seil einer Seilbahn verläuft an den Punkten $P(1|3|11)$ und $Q(1|15|15)$ über zwei Stützen. Eine Stromleitung hat ihre Fundamente in den Punkte $R(2|6|2)$ und $S(6|12|4)$. Die Koordinaten sind in m zu verstehen.

   a) Die Seilbahn kann in diesem Modell als Gerade modelliert werden. Bestimme eine Gleichung für diese Gerade g in Parameterform und zeige, dass die beiden Masten die gleiche Höhe besitzen.

   b) Eine Kabine, die an dem Seil der Umlaufbahn montiert ist besitzt eine Höhe von 4,00 m Die Stromleitung soll aus Sicherheitsgründen zum Mittelpunkt des Bodens der Seilbahnkabine einen Abstand von 2,00 m besitzen. Die Stromleitung soll ebenfalls als Gerade aufgefasst werden. Bestimme unter den oben angenommenen Bedingungen eine Gleichung der Geraden s für die Stromleitung und ermittle die Höhe der Masten unter der Bedingung, dass diese gleich hoch sein sollen.

   c) Ermittle die Koordinaten des Punktes, an dem sich die Seilbahn und Stromleitung überkreuzen. (Kreuzungspunkt K).

   d) Ermittle die Neigung des Skihangs gegenüber der Ebene $x_3 = 0$.

2. Auf der Piste soll ein Hubschrauberlandeplatz für den Rettungsdienst in Form eines Kreises markiert werden. Dieser soll einen Radius von 6,00 m besitzen und hat er hat seinen Mittelpunkt in dem Punkt $M(15|150|50)$. Die bei einer Landung zu schaffende Sicherheitszone hat von M in alle Richtungen den Abstand 60 m.

   a) Stelle aus den oben genannten Bedingungen die Gleichung für den Kreis k der Hubschrauberlandeplatz in der Ebene E des Skihangs auf.

   b) Bei der Landung eines Rettungshubschraubers befindet sich der Skifahrer Lebelustig an dem Punkt $L(30|40|80)$. Ermittle durch Rechnung, ob der Pistendienst den Skifahrer aus der Sicherheitszone entfernen muss oder ob der Hubschrauber ohne weitere Maßnahmen des Pistendienstes zur Landung ansetzen kann.

3. Im deutschen Museum soll als neues Ausstellungsstück eine kugelförmige Raumstation mit dem Radius 17 m zwischen dem zweiten und dritten Obergeschoss installier werden. Der Boden des dritten Obergeschosses bildet die x_1x_2- Ebene des Koordinatensystems, der Mittelpunkt M der Kugel hat die Koordinaten $M(-12|10|9)$.

   a) Berechne die Schnittpunkte der Kugeloberfläche mit der x_2-Achse.

   b) Bestimme die Koordinaten der Polpunkte der Kugel.

   c) Berechne, welche Fläche man aus dem Boden des dritten Obergeschosses ausschneiden muss, damit die Kugel wie vorgesehen in dem Museumsgebäude ausgestellt werden kann.