

Rechengesetze für Logarithmen1.) Summenregel

$$\begin{aligned}\log_2 4 + \log_2 2 &= \log_2 2^2 + \log_2 2^1 = \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \\ \log_2 4 \cdot 2 &= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\end{aligned}$$

offensichtlich gilt:

$$\log_2 4 \cdot 2 = \log_2 4 + \log_2 2$$

Allgemeine Regel:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

Summenregel

Beweis der Regel

$$\begin{aligned}\text{RS: } \log_a b &\Rightarrow a^x = b \\ \log_a c &\Rightarrow a^y = c\end{aligned}$$

Berechnung des Produkts:

$$\begin{aligned}a^x \cdot a^y &= b \cdot c \Rightarrow a^{x+y} = bc \quad | \log_a \\ \Rightarrow x+y &= \log_a bc\end{aligned}$$

Mit $x = \log_a b$ und $y = \log_a c$ folgt:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \quad \checkmark$$

Damit ist die Summenregel bewiesen.

2.) Differenzenregel

$$\begin{aligned}\log_2 4 - \log_2 2 &= \log_2 2^2 - \log_2 2^1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\log_2 \left(\frac{4}{2}\right) = \log_2 2 = 1$$

offensichtlich: $\log_2 4 - \log_2 2 = \log_2 \frac{4}{2}$

Allgemeine Regel:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Differenzenregel

Scolaflex

Feucht abwischen – nicht trocken nachwischen

umweltfreundlich, da mehrfach verwendbar

Beweis der Regel

Aus der rechten Seite folgt:

$$a^x = b \quad \text{und} \quad a^y = c$$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c}$$

Anwendung des PG: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
liefert auf der linken Seite

$$a^{x-y} = \frac{b}{c} \quad | \log_a$$

$$x-y = \log_a \frac{b}{c}$$

Wegen $x = \log_a b$ u. $y = \log_a c$
folgt:

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

Damit ist die Regel bewiesen.

3.) Die Potenzregel

$$\log_2 4^2 = \log_2 (2^2)^2 = \log_2 2^4 = 4$$

$$2 \cdot \log_2 4 = 2 \cdot \log_2 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

Allgemeine Regel

$$m \cdot \log_a b = \log_a b^m$$

Potenzregel

Beweis der Regel:

$$\log_a b^m = \log_a \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m\text{-Mal}}$$

Anwendung der Summenregel:

$$\log_a \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m\text{-Mal}} = \underbrace{\log_a b + \dots + \log_a b}_{m\text{-Mal}} = m \cdot \log_a b$$

Damit ist die Potenzregel bewiesen.

Scolaflex

Feucht abwischen – nicht trocken nachwischen

umweltfreundlich, da mehrfach verwendbar