Grundwissen ganzrationale Funktionen

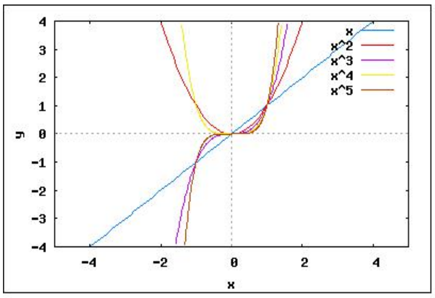
Definitionen und Sätze

Potenzfunktionen

Die ganzrationalen Funktionen setzen sich aus Potenzfunktionen zusammen.

> Unter einer Potenzfunktion versteht man eine Funktion mit der nachstehenden Funktionsvorschrift
>
> $$f\,:\,x \mapsto f(x) = x^n$$

In der folgenden Graphik sind einige Graphen von Potenzfunktionen gezeichnet.

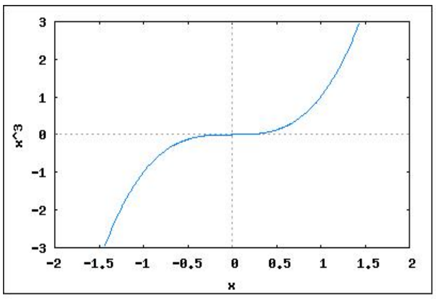


Die Graphen der Potenzfunktionen haben die folgenden Eigenschaften:

- Alle Graphen verlaufen durch den Punkt $(0|0)$ und den Punkt $(1|1)$.
- Alle Graphen von Funktionen mit geraden Exponenten verlaufen durch den Punkt $(-1|1)$ und sind achsensymmetrisch.
- Alle Graphen von Funktionen mit ungeradem Exponenten verlaufen durch den Punkt $(-1|-1)$ und sind punktsymmetrisch.

Musterbeispiele

1. Der nachstehende Punkt ist $P(4|64)$ liegt auf dem Graphen einer Potenzfunktion. Bestimme die Funktionsvorschrift und ermittle die Symmetrieeigenschaften des Graphen. Zeichne anschlieend den Graphen.
   - Schreibe $f(x) = 64$ als Potenz mit Basis 4
     $$64 = 4 \cdot 16 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$
   - Daher lautet die Funktionsvorschrift:
     $$f\,:\,x \mapsto f(x) = x^3$$
   - Der Exponent der Funktion ist ungerade, daher ist der Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.
   - Funktionsgraph



Definitionen und Sätze	Musterbeispiele

Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktionen versteht man eine Funktion mit der Funktionsvorschrift:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Die Koeffizienten a_n, a_{n-1},...,a_0 sind reelle Zahlen.
Der höchste Exponenent – also n– wird Grad der Funktion genannt.
Die Graphen von ganzrationalen Funktionen werden allgemein als Parabeln bezeichnet.
Nullstellen der Funktion sind die Stellen, an denen gilt

$$f(x) = 0$$

Sind x_1, x_2 ,..., x_n die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion vom Grad n, dann gilt

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$\Rightarrow \; f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

(Nullstellensatz)

Symmetrieeigenschaften

- Die Funktionsgleichung enthält nur ungerade Exponenten, dann ist die Funktion punktsymmetrisch.
- Die Funktionsgleichung enthält nur gerade Exponenten, dann ist die Funktion achsensymmetrisch.

Gegeben ist die ganzrationale Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x$$

1. Bestimme die Nullstellen.
2. Vorzeichenuntersuchung der Funktion
3. Zeichne den Funktionsgraph

1. Nullstellen $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \;\; x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow x_1 = -2 \;\; x_2 = 2$$

2. Vorzeichenuntersucheung der Funktion:

$$f(x) = x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$$

Dies folgt aus dem Nullstellensatz.
Man erstellt eine Vorzeichentabelle:

	-2	$-2..0$	$0..2$	$2 < x$
$x + 2$	-	$+$	$+$	$+$
x	-	-	$+$	$+$
$x - 2$	-	-	-	$+$
$f(x)$	-	$+$	-	$+$