Zusammenfassung: Wichtiges der Wurzelgesetze

Definition und Sätze

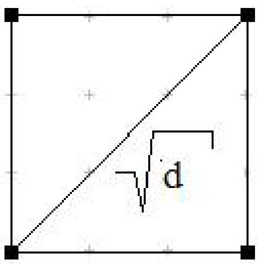
Näherungsverfahren für Wurzeln

Die Quadratwurzel sind als Lösung einer reinquadratischen Gleichung definiert:

> Die Quadratwurzel ist als nichtnegative Lösung der Gleichung
>
> $$x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}$$

Wurzelzahlen sind keine rationalen Zahlen, es handelt sich um irrationale Zahlen. Irrationale Zahlen sind unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen. Solche Zahlen kann man nur nährungsweise oder graphisch bestimmen. Die gängigsten Näherungsversuche sind die folgenden:

- Die Konstruktion als Diagonale in einem Quadrat.



- Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Funktionen

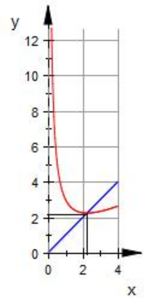
$$f : x \mapsto y = x$$

$$g : x \mapsto y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

- Das Heron- Verfahren.

Beispiele und Aufgaben

1. Bestimmung von $\sqrt{5}$ als Schnittpunkt von $y = x$ und $y = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$:



2. Bestimme $\sqrt{6}$ mit dem Heronverfahren.
   - Zerlege 6 in ein Produkt: $x_0 = 2$ und $y_0 = 3$
   - Bilde den Mittelwert:
   $$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} = 2{,}5$$
   - Berechne
   $$y_1 = \frac{6}{2{,}5} = 2{,}4$$
   - Bilde nun den Mittelwert
   $$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

3. Bestimme $\sqrt{3}$ über eine Intervallschachtelung

$$\begin{array}{rcccc} & 1{,}7^2 & < & 3 & < & 1{,}8^2 \\ \Rightarrow & 1{,}7 & < & \sqrt{3} & < & 1{,}8 \\ & 1{,}72^2 & < & 3 & < & 1{,}73^2 \\ \Rightarrow & 1{,}72 & < & \sqrt{3} & < & 1{,}73 \end{array}$$

Definitionen und Sätze	**Beispiel**

Rechnen mit Quadratwurzeln

Zum Rechnen mit Quadratwurzeln gibt es di folgenden grundlegenden Gesetze. Im Kontext der folgenden Regeln wird davon ausgegangen, dass a, b und c Zahlen aus R darstellen:

- Produkt aus Wurzeln:
$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$
- Quotient von Wurzeln
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$
- Quadrat einer Wurzelzahl:
$$(\sqrt{a})^2=a$$
- Wurzel aus einer Quadratzahl
$$\sqrt{a^2}=|a|$$
- Addition und Subtraktion von Wurzeln:
$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Die Gesetze gelten sowohl für Zahlenterme wie auch für Terme mit Formvariablen. Im Zusammenhang mit den Formvariablen sind auch die binomischen Formeln zum Vereinfachen und Zusammenfassen von Wurzeltermen von Bedeutung:

- erste binomische Formel:
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
- zweite binomische Formel:
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
- dritte binomische Formel:
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

1. Mache bei dem folgenden Term den Nenner rational:
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{24})\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6\cdot 2}-\sqrt{24\cdot 2}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{-2\sqrt{3}}{2}$$
2. Radiziere die folgende Wurzel teilweilse $\sqrt{240}$
$$\sqrt{240}=\sqrt{6\cdot 4\cdot 5\cdot 2}$$
$$=\sqrt{2\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 2}$$
$$=\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 5\cdot 3}$$
$$=4\sqrt{5\cdot 3}$$
$$=4\sqrt{15}$$
3. Vereinfache den Wurzelterm $\sqrt{3x^3+6x^2+3x}$ durch teilweises Radizieren:
$$\sqrt{3x^3+6x^2+3x}=\sqrt{3x(x^2+2x+1)}$$
$$=\sqrt{3x(x+1)^2}$$
$$=(x+1)\sqrt{3x}$$
4. Bestimme die Definitionsmenge des folgenden Wurzelterms
$$\sqrt{x^3+6x^2+9x}$$
$$=\sqrt{x(x^2+6x+9)}=\sqrt{x(x+3)^2}$$
$$=(x+3)\sqrt{x}\ \Rightarrow\ x>0$$
$$\Rightarrow x>0$$
Dieser Term ist definiert, wenn x aus R^+ ist.

Definitionen und Sätze	**Beispiele und Aufgaben**

Die allgemeine Wurzel

Ähnlich wie die Quadratwurzel definiert ist, kann man auch die allgemeine Wurzel festlegen:

> Die allgemeine Wurzel ist definiert als die nichtnegative Lösung der Gleichung
>
> $$x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

Man kann jede Quadratwurzel als eine Potenz mit einer Bruchzahl als Exponent schreiben:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Analog kann man jede allgemeine Wurzel als Potenz mit einer Bruchzahl als Exponent schreiben:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Für die Potenzen mit Bruchzahlen als Exponenten gelten die üblichen Potenzgesetze:

$$x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{c}{d}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{c}{d}}$$

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{c}{d}} = x^{\frac{mc}{nd}}$$

$$(xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{x^{\frac{m}{n}}}{y^{\frac{m}{n}}}$$

1. Schreibe die folgende Quadratwurzel als Potenz und vereinfache soweit wie möglich
$$\sqrt{128}$$
$$= 128^{\frac{1}{2}} = (2^7)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}}$$

2. Schreibe die allgemeine Wurzel als Potenz
$$\sqrt[4]{128}$$
$$= 128^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{4}}$$

3. Mache bei dem folgenden Term den Nenner rational:
$$\frac{5}{\sqrt[6]{5}}$$
$$= \frac{5}{5^{\frac{1}{6}}}$$
$$= \frac{5 \cdot 5^{\frac{5}{6}}}{5^{\frac{1}{6}}} \cdot 5^{\frac{5}{6}}$$
$$= \frac{5^{\frac{7}{6}}}{5}$$
$$= \frac{\sqrt[6]{5^7}}{5}$$

4. Fasse zusammen $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$
$$= a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$$