Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

„Der liebe Gott würfelt nicht!“
Albert Einstein um 1923

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

„Der liebe Gott würfelt nicht!“
Albert Einstein um 1923

Mit diesem Ausspruch brachte Albert Einstein sein Missfallen über die neue Richtung der Quantenmechanik aus, in der die Wahrscheinlichkeit eine dominante Rolle einzunehmen begann.

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

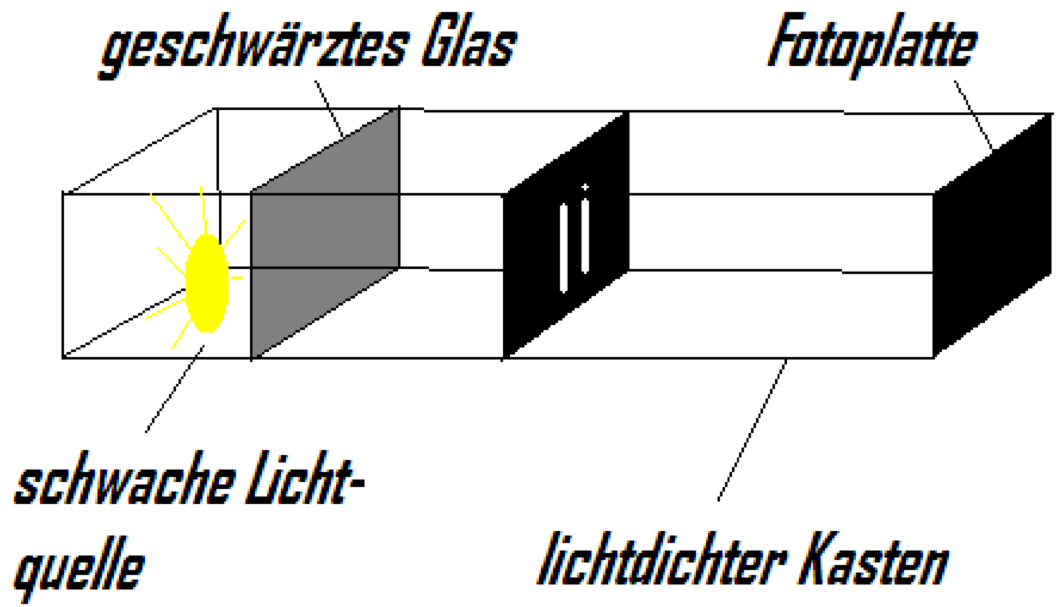
„Der liebe Gott würfelt nicht!"
Albert Einstein um 1923

Mit diesem Ausspruch brachte Albert Einstein sein Missfallen über die neue Richtung der Qunatenmechanik aus, in der die Wahrscheinlichkeit eine dominante Rolle einzunehmen begann.

Dies begann mit einer neuen quantenmechanischen Deutung Des Doppelspaltexperiments, das durch den englischen Physiker Taylor wie folgt abgewandelt wurde:

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

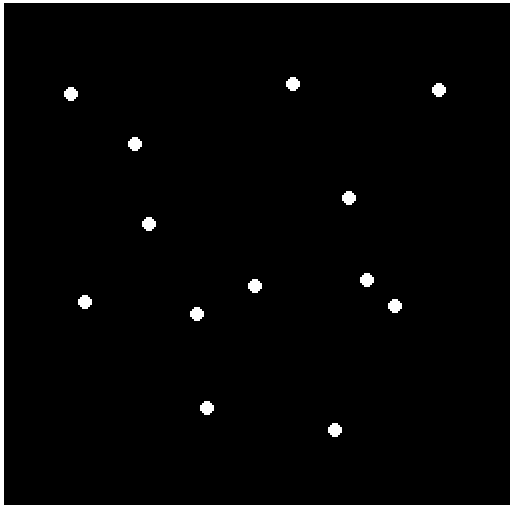
Versuchsaufbau von Talyor:



Mit diesem Versuchsaufbau konnte Young einzelne Photonen durch den Doppelspalt schicken.

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

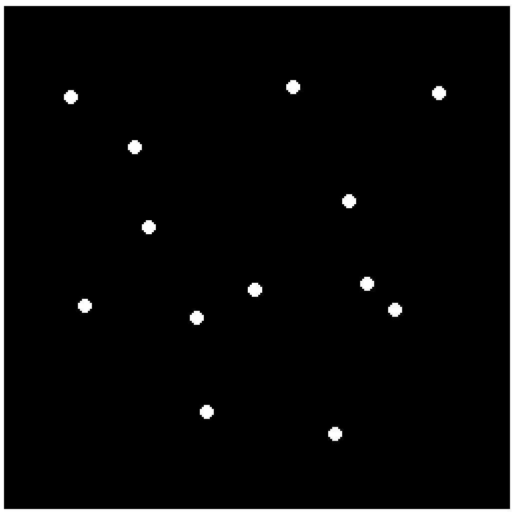
Ergebnis des Experiements:

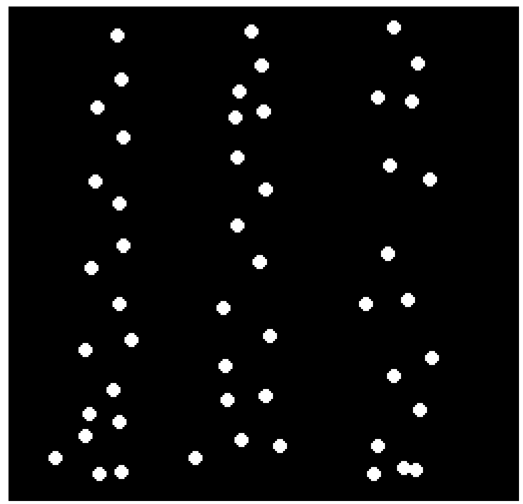


Kurze Belichtungszeit:

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Ergebnis des Experiements:

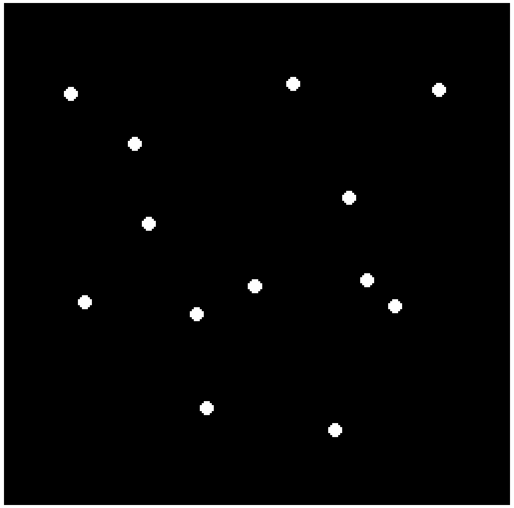




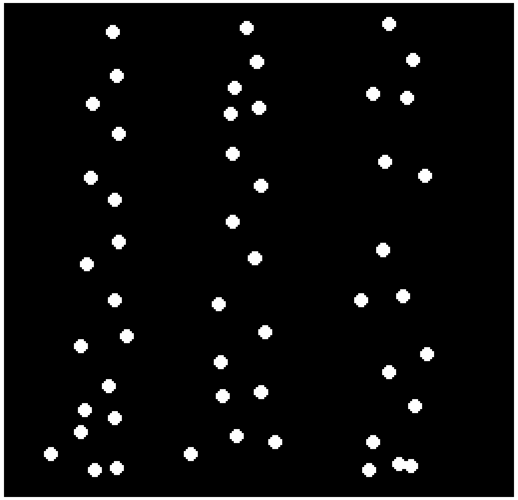
Kurze Belichtungszeit: 1 Tag Belichtungszeit

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

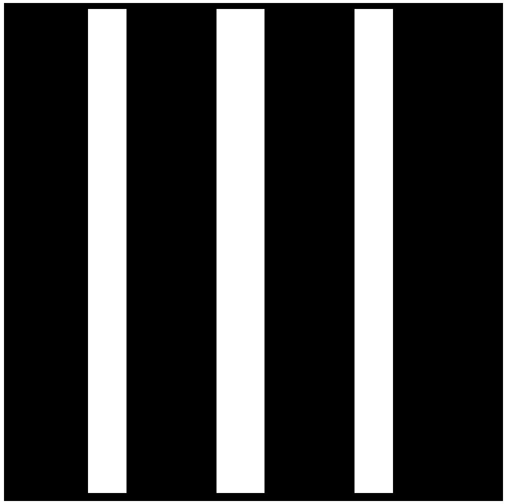
Ergebnis des Experiements:



Kurze Belichtungszeit:



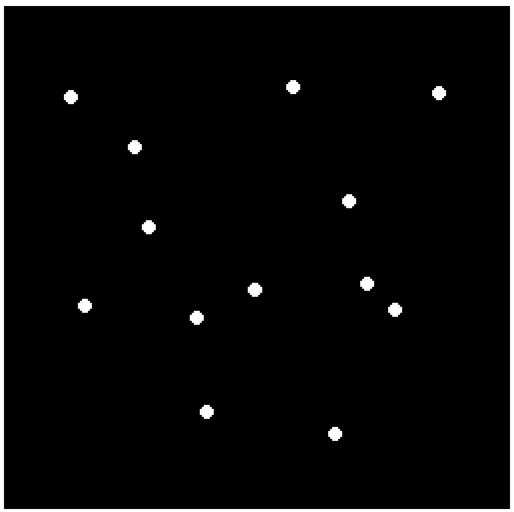
1 Tag Belichtungszeit



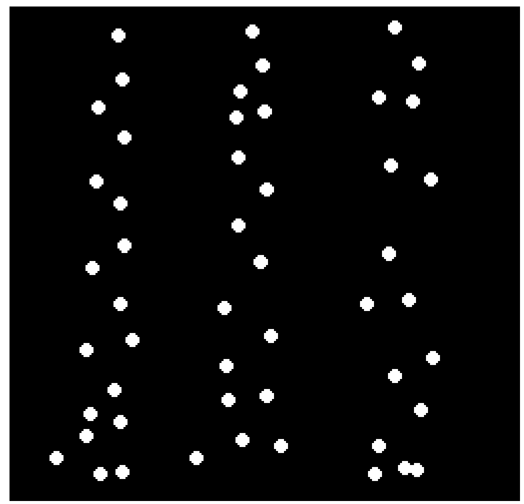
3 Tage Belichtungszeit

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

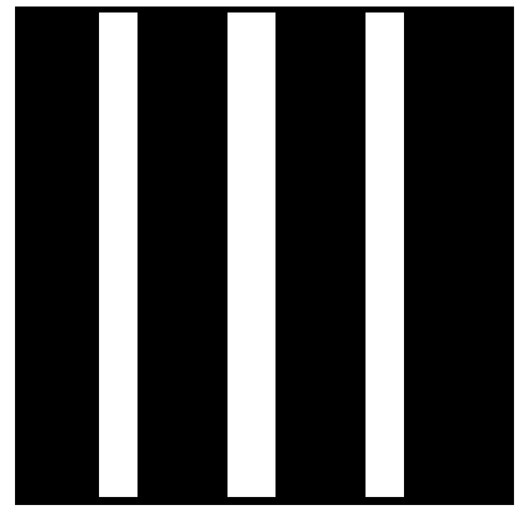
Ergebnis des Experiements:



Kurze Belichtungszeit: Völlig willkürliche Anordnung der Photonen



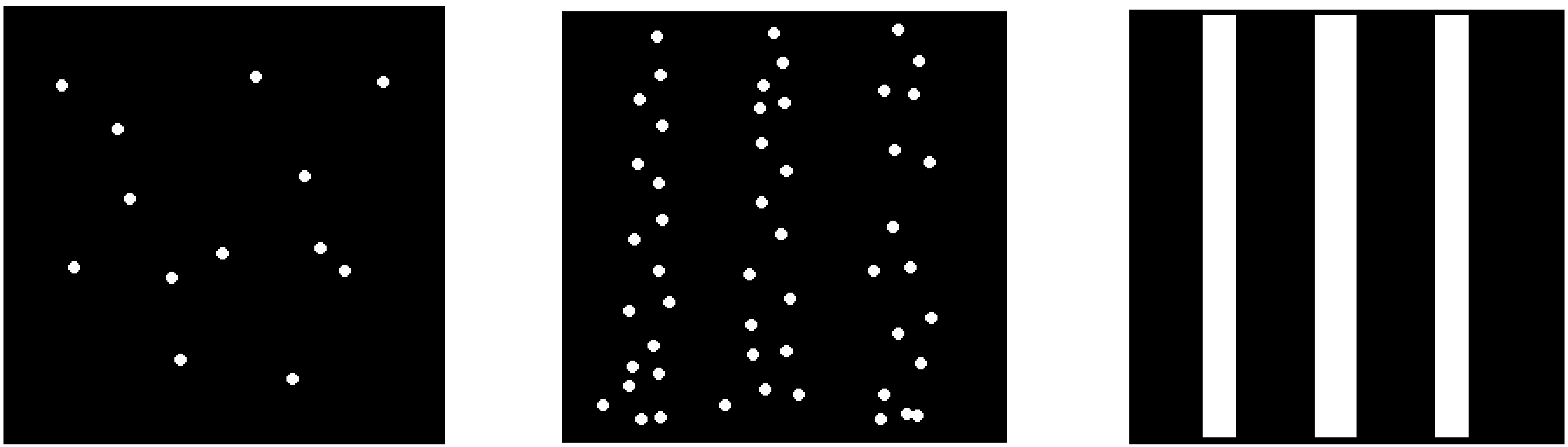
1 Tag Belichtungszeit



3 Tage Belichtungszeit

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Ergebnis des Experiements:



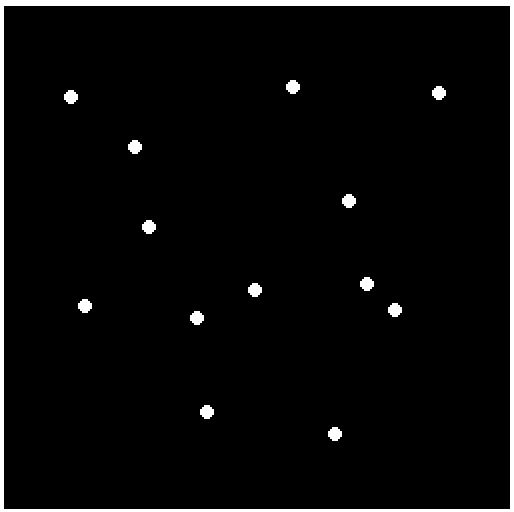
Kurze Belichtungszeit:
Völlig willkürliche An-
ordnung der Photonen

1 Tag Belichtungszeit
Die willkürliche Anordn-
ung erält eine allmähliche
struktur.

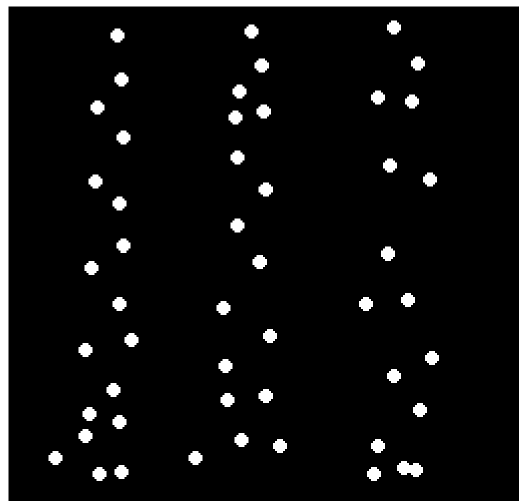
3 Tage Belichtungszeit

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

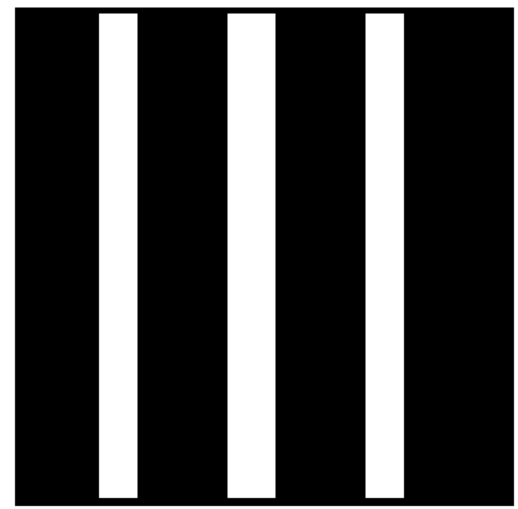
Ergebnis des Experiements:



Kurze Belichtungszeit:
Völlig willkürliche An-
ordnung der Photonen



1 Tag Belichtungszeit
Die willkürliche Anordn-
ung erält eine allmähliche
Struktur.



3 Tage Belichtungszeit
Es zeigt sich das ge-
wohnte Interferenz-
bild.

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Deutung des Taylorschen Doppelspaltversuchs:

Ein Photon trifft nach der Passage des Doppelspalts willkürlich auf der Fotoplatte auf.

Ein zeitlich längerer Ablauf des Doppelspaltexperiements zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen der Photonen an unterschiedlichen Orten einen unterschiedlichen Wert besitzt.

Ein langer zeitlicher Ablauf des Experiments zeigt, dass die Auftreffwahrscheinlichkeit bei den Interfernzmaxima den höchstens Wert annehmen muss.

Mathematisch: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen des Photons hängt von der Wellenfunktion ab.

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Ziel: Finden ein Maß für die Auftreffwahrscheinlichkeit eines Photons.

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Ziel: Finden ein Maß für die Auftreffwahrscheinlichkeit eines Photons.

Um dieses Ziel zu erreichen wird eine Lichtwelle oder eine Materialwelle als statistische Funktion gedeutet, die eine Orts-angabe unter einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angibt.

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Ziel: Finden ein Maß für die Auftreffwahrscheinlichkeit eines Photons.

Um dieses Ziel zu erreichen wird eine Lichtwelle oder eine Materialwelle als statistische Funktion gedeutet, die eine Ortsangabe unter einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angibt.

Diese Funktion ist auf den komplexen Zahlen definiert und hat die Form

$$\psi(x) = \psi_0(\cos(x) + i \cdot \sin(x))$$

besitzt. i ist dabei die imaginäre Einheit, deren Quadrat -1 ist.

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Ziel: Finden ein Maß für die Auftreffwahrscheinlichkeit eines Photons.

Um dieses Ziel zu erreichen wird eine Lichtwelle oder eine Materialwelle als statistische Funktion gedeutet, die eine Ortsangabe unter einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angibt.

Diese Funktion ist auf den komplexen Zahlen definiert und hat die Form

$$\psi(x)=\psi_0(\cos(x)+i\cdot\sin(x))$$

besitzt. i ist dabei die imaginäre Einheit, deren Quadrat -1 ist.

Der reale Ort, an dem sich ein Photon oder Teilchen befindet ist das Produkt aus dem Ort mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Teilchen an diesem Ort aufhält.

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist eine reale Größe, die man aus dem Produkt der Wellenfunktion mit ihrem komplex konjungierten erhält. Das komplex konjungierte unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen vor dem Term mit der imaginären Einheit:

$$\bar{x} = x \cdot \psi(x) \cdot \psi * (x)$$

$$\bar{x} = x \psi_0 \cdot (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot \psi_0 (\cos(x) - i \cdot \sin(x))$$

$$\bar{x} = x \psi_0^2 (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist eine reale Größe, die man aus dem Produkt der Wellenfunktion mit ihrem komplex konjungierten erhält. Das komplex konjungierte unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen vor dem Term mit der imaginären Einheit:

$$\bar{x} = x \cdot \psi(x) \cdot \psi*(x)$$

$$\bar{x} = x\,\psi_0 \cdot (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot \psi_0(\cos(x) - i \cdot \sin(x))$$

$$\bar{x} = x\,\psi_0^2(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

Interpretiert man nun noch in der letzten Zeile den Term

$$\psi_0^2(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

Als eine Vektorangabe im Gaußschen Zahlenraum, dann kann man den Term als Betragsquadrat von dieser Funktion deuten:

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist eine reale Größe, die man aus dem Produkt der Wellenfunktion mit ihrem komplex konjungierten erhält. Das komplex konjungierte unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen vor dem Term mit der imaginären Einheit:

$$\bar{x} = x \cdot \psi(x) \cdot \psi*(x)$$

$$\bar{x} = x \psi_0 \cdot (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot \psi_0 (\cos(x) - i \cdot \sin(x))$$

$$\bar{x} = x \psi_0^2 (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

Interpretiert man nun noch in der letzten Zeile den Term

$$\psi_0^2 (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

Als eine Vektorangabe im Gaußschen Zahlenraum, dann kann man den Term als Betragsquadrat von dieser Funktion deuten:

$$\psi_0^2 (\cos^2 x + \sin^2 x) = |\psi(x)|^2$$

Quantenmechanik& Wahrscheinlichkeit

Damit stellt der Term

$$\psi_0^2(\cos^2 x+\sin^2 x)=|\psi(x)|^2$$

Ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit dar und wird als Wahrscheinlichkeitsdichte definiert:

$$P(x)=|\psi(x)|^2$$

Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthaltsort eines Quantenobjekts im Raum.

Damit ist dieses Konzept ist von den Lichtwellen auch auf die Materialwellen übertragbar.

Heisebergsche Unschärferelation

Der statistische Einfluss auf die Quantenmecanik warf die Frage auf,
Ob die Newtonsche Axiome, auf denen die ganze klassische Physik ruht
überhaupt als richtig angenommen werden dürfen

Heisenbergsche Unschärferelation

Der statistische Einfluss auf die Quantenmecanik warf die Frage auf,
Ob die Newtonsche Axiome, auf denen die ganze klassische Physik ruht
überhaupt als richtig angenommen werden dürfen

Werner Heisenberg klärte diese Frage durch das folgende Gedanken-experiment.

Heisenbergsche Unschärferelation

Der statistische Einfluss auf die Quantenmecanik warf die Frage auf,
Ob die Newtonsche Axiome, auf denen die ganze klassische Physik ruht
überhaupt als richtig angenommen werden dürfen

Werner Heisenberg klärte diese Frage durch das folgende Gedanken-
experiment.

Ein Elektronenstrahl trifft auf einen Spalt der Breite d.

Heisenbergsche Unschärferelation

Der statistische Einfluss auf die Quantenmecanik warf die Frage auf,
Ob die Newtonsche Axiome, auf denen die ganze klassische Physik ruht
überhaupt als richtig angenommen werden dürfen

Werner Heisenberg klärte diese Frage durch das folgende Gedanken-
experiment.

Ein Elektronenstrahl trifft auf einen Spalt der Breite d.
Je kleiner nun die Spaltöffnung d ist, desto eine stärker ist die Beugung
des Elektronenstrahls.

Heisenbergsche Unschärferelation

Der statistische Einfluss auf die Quantenmecanik warf die Frage auf,
Ob die Newtonsche Axiome, auf denen die ganze klassische Physik ruht
überhaupt als richtig angenommen werden dürfen

Werner Heisenberg klärte diese Frage durch das folgende Gedanken-experiment.

Ein Elektronenstrahl trifft auf einen Spalt der Breite d.
Je kleiner nun die Spaltöffnung d ist, desto eine stärker ist die Beugung des Elektronenstrahls.

Je größer aber die Beugung des Elektronenstrahls ist, desto unschärfer fällt das Hauptmaximum aus.

Heisenbergsche Unschärferelation

Der statistische Einfluss auf die Quantenmecanik warf die Frage auf,
Ob die Newtonsche Axiome, auf denen die ganze klassische Physik ruht
überhaupt als richtig angenommen werden dürfen

Werner Heisenberg klärte diese Frage durch das folgende Gedanken-
experiment.

Ein Elektronenstrahl trifft auf einen Spalt der Breite d.
Je kleiner nun die Spaltöffnung d ist, desto eine stärker ist die Beugung
des Elektronenstrahls.

Je größer aber die Beugung des Elektronenstrahls ist, desto unschärfer
fällt das Hauptmaximum aus.
Damit wird aber der Auftreffort des Elektrons immer ungenauer be-
stimmbar

Heisenbergsche Unschärferelation

Das Ergbnis wird durch Heisenberg folgendermaßen zusammengefasst:

Heisenbergsche Unschärferelation

Das Ergebnis wird durch Heisenberg folgendermaßen zusammengefasst:

Bei einem Mikroskopischen Teilchens ist es nicht möglich gleichzeitig den Ort und die Bewegungsrichtung des Teilchens festzulegen.

Heisenbergsche Unschärferelation

Das Ergebnis wird durch Heisenberg folgendermaßen zusammengefasst:

Bei einem Mikroskopischen Teilchens ist es nicht möglich gleichzeitig den Ort und die Bewegungsrichtung des Teilchens festzulegen.

Mathematische Formulierung:
Dazu betrachtet man das Interferenzmaximum erster Ordnung.
Hier kennt man die folgende Beziehung:

Heisenbergsche Unschärferelation

Das Ergebnis wird durch Heisenberg folgendermaßen zusammengefasst:

Bei einem Mikroskopischen Teilchens ist es nicht möglich gleichzeitig den Ort und die Bewegungsrichtung des Teilchens festzulegen.

Mathematische Formulierung:
Dazu betrachtet man das Interferenzmaximum erster Ordnung.
Hier kennt man die folgende Beziehung:

$$\sin \phi_1 = \frac{\lambda}{d}$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Das Ergebnis wird durch Heisenberg folgendermaßen zusammengefasst:

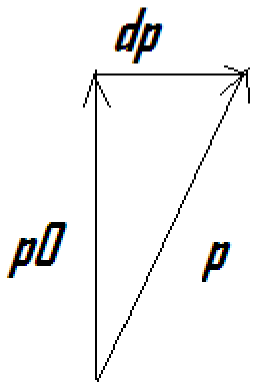
Bei einem Mikroskopischen Teilchens ist es nicht möglich gleichzeitig den Ort und die Bewegungsrichtung des Teilchens festzulegen.

Mathematische Formulierung:
Dazu betrachtet man das Interferenzmaximum erster Ordnung.
Hier kennt man die folgende Beziehung:

$$\sin\phi_1 = \frac{\lambda}{d}$$

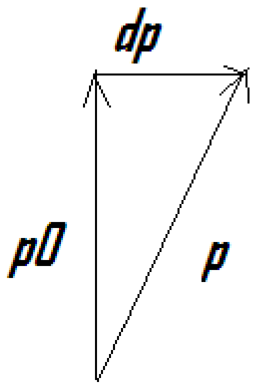
Damit das Teilchen am ersten Intereferenzmaximum wahrgenommen werden kann, muss es an einem Photon einen Stoß ausgeführt haben. Den Zusammenhang zeigt die nächste Grafik

Heisenbergsche Unschärferelation



Aufgrund der Graphik gilt zusätzlich:

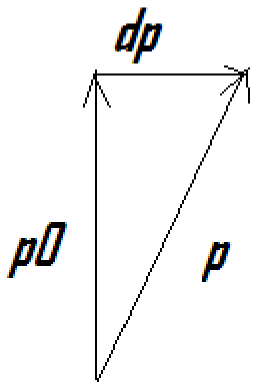
Heisenbergsche Unschärferelation



Aufgrund der Graphik gilt zusätzlich:

$$\frac{dp}{p} = \sin \phi_1$$

Heisenbergsche Unschärferelation



Aufgrund der Graphik gilt zusätzlich:

$$\frac{dp}{p} = \sin\phi_1$$

Da nun es sich hier um den quantenmechanischen Impuls handelt kommt man insgesamt zur folgenden Aussage:

$$\frac{dp \cdot \lambda}{h} = \frac{\lambda}{d}$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Da der Spaltabstand eine maximale Begrenzung für den Auftreffort dx ist, ergibt sich nun weiter:

$$\frac{dp}{h} \geqslant \frac{1}{dx}$$

$$dp \cdot dx \geqslant h$$

Die letzte Zeile ist die mathematische Formulierung der Heisenberg-Unschärferelation und sie sagt aus, dass die Genauigkeit von Impuls und Auftreffort eines Teilchens beschränkt sind und von einander ab-hängen.

Heisenbergsche Unschärferelation

Makroskopisches Beispiel:
Ein Körper der Masse $m=3{,}00$ kg bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 3,00 m/s. Berechne die zu erwartende Ortsunschärfe nach der Formel von Heisenberg.

Heisenbergsche Unschärferelation

Makroskopisches Beispiel:
Ein Körper der Masse m=3,00 kg bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 3,00 m/s. Berechne die zu erwartende Ortsunschärfe nach der Formel von Heisenberg.

Mikroskopisches Beispiel:
Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 1{,}50 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$

und hat eine Masse von $9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$. Berechne die Ortsunschärfe mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

Heisenbergsche Unschärferelation

Lösung der Aufgaben:
Makroskopische Sichtweise

$$dx \geqslant \frac{h}{dp}$$

$$dx \geqslant \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Js}{3{,}00\, kg \cdot 3{,}00\, \frac{m}{s}}$$

$$dx \geqslant 7{,}36 \cdot 10^{-35}\, m$$

Mikroskopische Sichtweise:

$$dx \geqslant \frac{h}{dp}$$

$$dx \geqslant \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Js}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\, kg \cdot 1{,}50 \cdot 10^{5}\, \frac{m}{s}}$$

$$dx \geqslant 4{,}85 \cdot 10^{-9}\, m$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Ergebnissauswertung:
Im Makroskopischen Fall ist die Ortsunschärfe trotz eines genau fest-gelegten Impulses vernachlässigenswert.

Heisenbergsche Unschärferelation

Ergebnisauswertung:
Im Makroskopischen Fall ist die Ortsunschärfe trotz eines genau fest-gelegten Impulses vernachlässigenswert.
Daher spielt im makroskopischen Fall die Statistik keine Rolle und die Gesetze von Newton sind uneingeschränkt gültig.

Heisenbergsche Unschärferelation

Ergebnisauswertung:
Im Makroskopischen Fall ist die Ortsunschärfe trotz eines genau festgelegten Impulses vernachlässigenswert.
Daher spielt im makroskopischen Fall die Statistik keine Rolle und die Gesetze von Newton sind uneingeschränkt gültig.

Im mikroskopischen Fall ist die Ortsunschärfe bei einem scharf definierten Impuls annähernd 10 mal so gross wie der Durchmesser des Teilchens.
Daher spielt hier die Statistik zur Beschreibung des Systems eine erhebliche Rolle und kann nicht übergangen werden.

Heisenbergsche Unschärferelation

Ergebnisauswertung:
Im Makroskopischen Fall ist die Ortsunschärfe trotz eines genau festgelegten Impulses vernachlässigenswert.
Daher spielt im makroskopischen Fall die Statistik keine Rolle und die Gesetze von Newton sind uneingeschränkt gültig.

Im mikroskopischen Fall ist die Ortsunschärfe bei einem scharf definierten Impuls annähernd 10 mal so gross wie der Durchmesser des Teilchens.
Daher spielt hier die Statistik zur Beschreibung des Systems eine erhebliche Rolle und kann nicht übergangen werden.
Damit kann man im mikroskopischen Fall nicht mehr von der Bewegung auf einer Bahn sprechen sondern nur davon, dass sich mikroskopische Teilchen nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf einer ausgezeichneten Bahn bewegen werden.

Heisenbergsche Unschärferelation

Makroskopisches Beispiel:
Ein Körper der Masse m=3,00 kg bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 3,00 m/s. Berechne die zu erwartende Ortsunschärfe nach der Formel von Heisenberg.

Mikroskopisches Beispiel:
Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 1{,}50 \cdot 10^{6} \frac{m}{s}$

und hat eine Masse von $9{,}11 \cdot 10^{-31}\, kg$. Berechne die Ortsunschärfe mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

Was kann man anhand dieser beiden Ergebnisse über die Gültigkeit der Newtonschen Axiome aussagen und welche Rückschlüsse lässt dies auf die allgemeine Modellbildung in der Physik zu?

Heisenbergsche Unschärferelation

Lösung der Aufgaben:
Makroskopische Sichtweise

$$dx \geqslant \frac{h}{dp}$$

$$dx \geqslant \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Js}{3{,}00\, kg \cdot 3{,}00\, \frac{m}{s}}$$

$$dx \geqslant 7{,}36 \cdot 10^{-35}\, m$$