Erwartungshorizont zu den Übungsaufgaben

Aufgabe 1: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

a) $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

b) Nullstellen der Funktion: $f(x) = 0$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 \quad - 4) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\
\underline{-(x^3 - \quad x^2)} \\
\quad 4x^2 \\
\quad \underline{-(4x^2 - 4x)} \\
\qquad 4x - 4 \\
\qquad \underline{4x - 4} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Restpolynom: $r(x) = x^2 + 4x + 4$

$r(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x+2)^2 = 0 \quad |\sqrt{\ }$

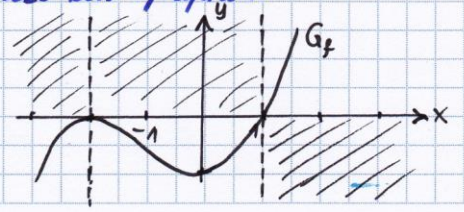
$\Rightarrow \quad x = -2$ (doppelte Nullstelle)

Faktorisierte Darstellung: $f(x) = (x-1) \cdot (x+2)^2$

Vorzeichenuntersuchung:

x		-2		1	
$x-1$	$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$-$		$+$

Skizze des Graphens



www.etwinning.de

<u>Aufgabe 2</u>: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

a) zu zeigen: $f(x)$ achsensymmetrisch zur y-Achse

Beweis: $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 6$

$= x^4 - 5x^2 + 6$

$= f(x)$

$\Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse, da $f(x) = f(-x)$

b) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ | Substitution $u = x^2$

$u^2 - 5u + 6 = 0$

$u_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow u_1 = 3$ oder $u_2 = 2$

Resubstitutionsgleichungen:

$x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}$ $\quad$ $x^2 = 2 \Rightarrow x_3 = \sqrt{2}$

$x_2 = -\sqrt{3}$ $\quad$ $x_4 = -\sqrt{2}$

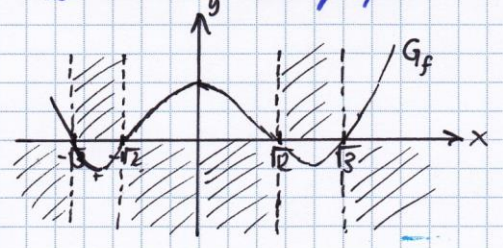
Faktorisierte Darstellung:

$f(x) = (x+\sqrt{3})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})$

Vorzeichenuntersuchung

		$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	
$x+\sqrt{3}$	−	+	+	+	+	
$x+\sqrt{2}$	−	−	+	+	+	
$x-\sqrt{2}$	−	−	−	+	+	
$x-\sqrt{3}$	−	−	−	−	+	
$f(x)$	+	−	+	−	+	

Skizze des Funktionsgraphen



www.etwinning.de

<u>Aufgabe 3</u>: $f(x) = x^3 - 2x^2$

a) zu zeigen: $f(x)$ zu $P(1|0)$ punktsymmetrisch

Beweis: $-f(1-x) = -[(1-x)^3 - 2\cdot(1-x)^2]$

$= -[(1-x)(1-2x+x^2) - 2(1-2x+x^2)]$

$= -[1-2x+x^2-x+2x^2-x^3-2+4x-2x^2]$

$= -[-x^3+x^2+x-1]$

$= x^3 - x^2 - x + 1$

$f(1+x) = (1+x)^3 - 2\cdot(1+x)^2$

$= (1+x)(1+2x+x^2) - 2(1+2x+x^2)$

$= 1+2x+x^2+x+2x^2+x^3-2-4x-2x^2$

$= x^3 - x^2 - x + 1$

$\Rightarrow -f(1-x) = f(1+x)$ und damit ist $f(x)$ zu $P(1|0)$ punktsymmetrisch

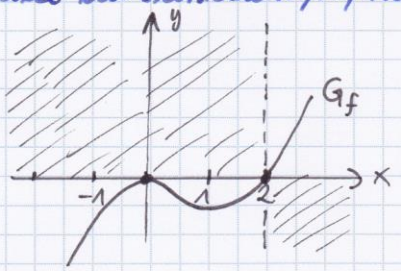
b) Nullstellen der Funktion: $f(x) = 0$

$x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2\cdot(x-2) = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0$ oder $x - 2 = 0$

$x = 0$ oder $x = 2$

Skizze des Funktionsgraphen



www.etwinning.de

Nullstellen von Funktionen → Funktionsterm

Aufgabe 1

$x_0 = 1$ einfache Nullstelle

$x_1 = 4$ dreifache Nullstelle

$x_2 = 7$ einfache Nullstelle

Anwendung des Nullstellensatzes:

$f(x) = a \cdot (x-1) \cdot (x-4)^3 \cdot (x-7)$

Bestimmung von a: P(0|1) ist ein Punkt des Graphen ⇒ Setze $f(x) = 1$ und $x = 0$ ein ⇒

$1 = a \cdot (0-1) \cdot (0-4)^3 \cdot (0-7)$

$1 = a \cdot (-1) \cdot (-64) \cdot (-7)$

$1 = a \cdot (-448)$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{448}$

Anschreiben der Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{448} \cdot (x-1)(x-4)^3(x-7)$

Aufgabe 2

Anwendung des Nullstellensatzes:

$f(x) = a \cdot (x-1)^2 \cdot (x-5)^2$

Bestimmung von a: $1 = a \cdot (0-1)^2 \cdot (0-5)^2$

$1 = 25 \cdot a \Rightarrow a = \frac{1}{25}$

Anschreiben der Funktionsgleichung:

$f(x) = \frac{1}{25} \cdot (x-1)^2 \cdot (x-5)^2$

www.etwinning.de