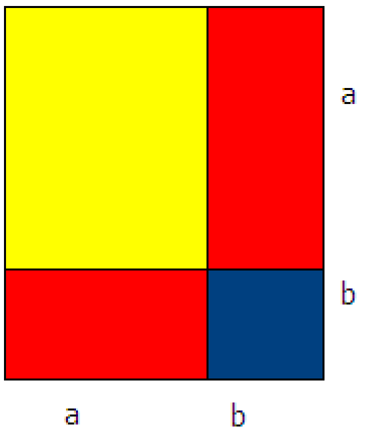
2.4 Die binomische Formel

Beispiel:



a=3cm
b=2cm

Auftrag:
Berechne die Gesamtfläche der oben stehenden Figur auf zwei verschiedene Arten!

1. Möglichkeit	2. Möglichkeit: Teilflächenberechnung
Mit Zahlenbeispiel $(3cm+2cm)^2=(5cm)^2=25cm^2$ Mit Variablen: $(a+b)^2$	Zahlenbeispiel: $(3cm)^2+2\cdot 3cm\cdot 2cm+(2cm)^2$ $9cm^2+12cm^2+4cm^2=25cm^2$ Mit Variablen $a^2+2ab+b^2$

Da beide Terme die gleiche Fläche beschreiben, sind die beiden Terme äquivalent zueinander, d.h.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

1. binomische Formel

Beispiel:
$(3m+7n)^2=(3m)^2+2\cdot 3m\cdot 7n+(7n)^2=9m^2+42mn+49n^2$
$(a\quad+b)^2=\mathrm{a}^2\qquad+2ab\qquad\qquad+\mathrm{b}^2$

Vorgehen beim Anwenden der 1. binomischen Formel:
1. Was steht für a bzw. was steht für b?
2. Einsetzen der Terme für a und b in die rechte Seite der Formel
3. Vereinfache soweit wie möglich.

Beispiel:
$\left(4x+9y\right)^2=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 9y+(9y)^2=16x^2+72xy+81y^2$
$\left(\frac{3}{4}s+\frac{1}{3}t\right)^2=\frac{9}{16}s^2+2\cdot\frac{3}{4}s\cdot\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}t^2=\frac{9}{16}s^2+\frac{1}{2}st+\frac{1}{9}t^2$

Die zweite binomische Formel

Zur Wiederholung wird die erste binomische Formel angeschrieben:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

In der Formel wird nun das b durch -b ersetzt.

$$(a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Damit lautet die zweite binomische Formel:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Die dritte binomische Formel:

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Dritte Binomische Formel:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

2.5 Faktorisieren von Polynomen mit den binomischen Formeln

Beispiel:

$a^2 + 2ab + b^2$

Unter einem Polynom versteht man die Summe von Termen mit Potenzen.

Ziel: Aus einer Summe soll ein Produkt entstehen.

Beispiel zur Einführung

Es soll die Lösungsmenge der folgenden Gleichung gelöst werden:

$4x^2 + 12x + 9 = 0$

Problem: Die Gleichung ist mit bisherigen Mitteln nicht lösbar.

Ziel: Rückführung der Lösung dieser Gleichung auf eine bereits bekannte Gleichungsart.

Idee: Rückführung der linken Seite mit 1. binomischen Formel

Vorarbeit: Rückwärtsanwendung der ersten binomischen Formel

$4x^2 + 12x + 9$

$a^2 + 2ab + b^2$

$\Rightarrow\ a^2 = 4x^2 \Rightarrow\ a^2 = 2^2x^2 \Rightarrow\ a^2 = (2x)^2 \Rightarrow\ a = 2x$

$\Rightarrow\ b^2 = 9 \Rightarrow\ b^2 = 3^2 \Rightarrow\ b = 3$

Probe : Gemischte Produkt :

$2ab = 2 \cdot 2x \cdot 3 = 12x$

Nach diesen Überlegungen gilt :

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2 = (2x + 3) \cdot (2x + 3)$

Damit lässt sich die Gleichung umschreiben zu :

$(2x + 3) \cdot (2x + 3) = 0$

Dies lässt sich wie folgt interpretieren : Es liegt ein Produkt vor, dessen Wert Null ist

Ein Produkt ist immer dann Null, wenn ein Faktor Null ist :

$\Rightarrow\ 2x + 3 = 0 \mid -3$

$2x = -3 \mid : 2$

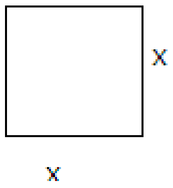
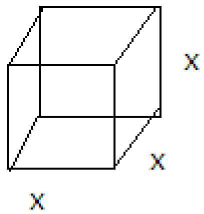
$x = -\frac{3}{2}$

Feststellung:

Durch die Umwandlung des Polynoms in ein Produkt war man zur Lösung der Gleichung in der Lage.

2.6 Die allgemeine Wurzel

Einführendes Beispiel:
Ein Quadrat hat den Flächeninhalt 2 FE (Flächeneinheiten) und ein Würfel hat einen Rauminhalt von 2 RE (Raumeinheiten). Bestimme von beiden Objekten die Kantenlänge.

Quadrat	Würfel
	
$x^2 = 2$ $x^1 = \sqrt{2}$ Alternative Schreibweise Auf der linken Seite wurde der Exponent der Potenz mit Basis x durch 2 dividiert. $x^2 = 2^1$ $x^{2:2} = 2^{1:2}$ $x^1 = 2^{\frac{1}{2}}$ Auch auf der rechten Seite wurde der Exponent der Potenz mit Basis 2 durch 2 dividiert. $\Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}}$	$x^3 = 2$ $x^1 = \sqrt[3]{2}$ Alternative Schreibweise Auf der linken Seite wurde der Exponent der Potenz mit der Basis x durch 3 dividiert. $x^{3:3} = 2^{1:3}$ $x^1 = 2^{\frac{1}{3}}$ Auch auf der rechten Seite wurde der Exponent der Potenz mit der Basis 2 durch 3 dividiert. $\Rightarrow \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

Definition:
Sei a eine positive Zahl und n eine natürliche Zahl, dann ist die n-te Wurzel aus a definiert durch:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Potenzen mit einem rationalem Exponenten (d.h. der Exponent ist eine Bruchzahl) sind Wurzeln.

Bemerkung:
Für Potenzen mit rationalem Exponenten gelten die bekannten Potenzgesetze, die an dieser Stelle wiederholt werden.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$$

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

Beispiel:
Vereinfache den folgenden Term soweit wie möglich:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \left(\left((2)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{24}}$$

Übungen zur allgemeinen Wurzel

Aufgabe 1e

$$x\sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x \cdot \left(x^3 \cdot \left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x \cdot x^{3\cdot\frac{1}{4}} \cdot \left(x^5\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

$$= x \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot \left(x^5\right)^{\frac{1}{12}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{12}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1+\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{12+9+5+4}{12}} = x^{\frac{30}{12}} = x^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{x^5}$$

Aufgabe 1d

$$\sqrt[6]{x\sqrt[2]{x^3}} \cdot \sqrt{x} = \left(x \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{2+3+6}{12}} = x^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{x^{11}}$$

Aufgabe 2
Mache den Nenner rational
Rationalmachen bedeutet, dass im Nenner keine Wurzel mehr steht.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1^2} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \sqrt{x}}{x-1} = \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{3x}+3}{\sqrt{3x}-3} = \frac{\left(\sqrt{3x}+3\right)^2}{\left(\sqrt{3x}-3\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)} = \frac{3x+6\sqrt{3x}+9}{3x-9} = \frac{3(x+2\sqrt{3}+3)}{3(x-3)} = \frac{x+2\sqrt{3x}+3}{x-3}$$

Ergebnis der Stillarbeit:

$$\left(x^3 \cdot x^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{9+8+4+2}{12}} = x^{\frac{23}{12}} = \sqrt[12]{x^{23}}$$

Ergebnis

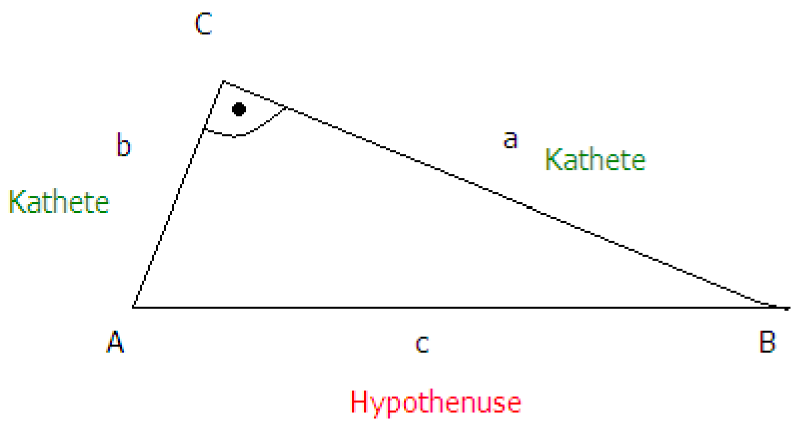
$$\left(x^2 x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\left(x^2\right)^{\frac{1}{5}}\right)^3 = x^{\frac{2}{5}} x^{\frac{2}{15}} \cdot x^{\frac{4}{5}} = x^{\frac{6+2+12}{15}} = x^{\frac{20}{15}} = \sqrt[12]{x^{20}}$$

3. Die Satzgruppe des Pythagoras
3.1 Der Hauptsatz des Pythagoras

Beispiel: Tabelle aus dem Arbeitsblatt:

a	b	c	a^2	b^2	a^2+b^2	c^2
3	4	5	9	16	25	25
4	3	5	16	9	25	25
6	8	10	36	64	100	100
7	24	25	49	576	625	625
11	60	61	121	3600	3721	3721

Feststellung:
Die Summe aus a^2 und b^2 entspricht immer dem Quadrat von c.



a^2 entspricht dem Quadrat einer Kathete
b^2 entspricht dem Quadrat der zweiten Kathete

Formulierung des Hauptsatzes von Pythagoras:

Die Summe der Kathetenquadrate ist identisch mit dem Quadrat der Hypothenuse. Im rechtwinkligen Dreieck in der Standardnummerierung gilt dann:

$$a^2+b^2=c^2$$

Beispiel: Länge des Stromkabels in der Einführung des Arbeitsblattes:
a=24,0 m b=10,0 m
Gesucht: c

a und b sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC und c ist die Hypothen-use. => Anwendung des Satzes von Pythagoras:
$a^2+b^2=c^2$

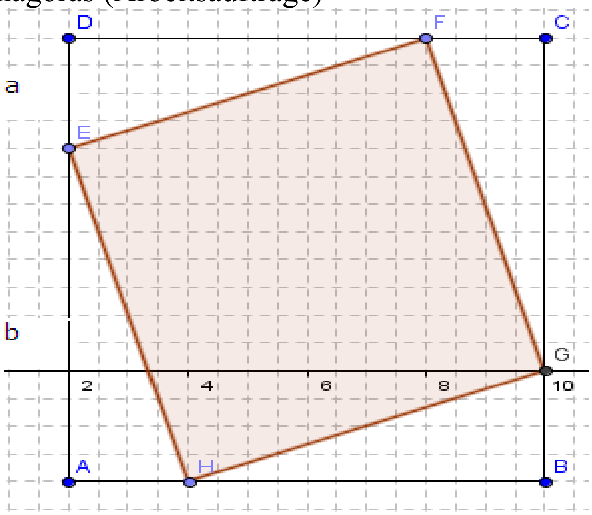
$(24m)^2 + (10m)^2 = c^2$

$576m^2 + 100m^2 = c^2$

$676m^2 = c^2 \mid \sqrt{.}$

$c = 26m$

Beweis des Satzes von Pythagoras (Arbeitsaufträge)



Weil die 4 Dreiecke jeweils die gleichen Katheten und den gleichen Zwischenwinkel besitzen, sind die Dreiecke nach sws kongruent.

=> HGFE ist ein Quadrat. $\overline{HG} = \overline{GF} = \overline{FE} = \overline{EH} = c$

Flächeninhalt $A_{HGEF} = c^2$

Flächeninhalt eines Dreiecks:

$A = \frac{1}{2}ab \Rightarrow \quad A = 4 \cdot \frac{1}{2}ab = 2ab$

Andererseits gilt für die Fläche des Quadrats HGEF:

$A_{HGEF} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta}$

$A_{HGEF} = (a+b)^2 - 2ab$

$A_{HGEF} = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 \quad (1)$

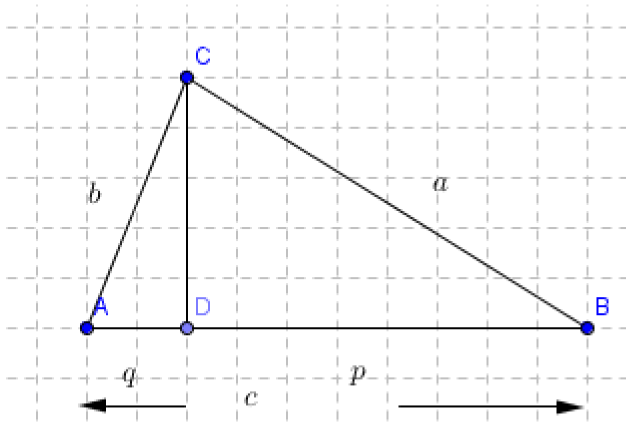
$A_{HGEF} = c^2 \quad (2)$

Damit haben wir für die Fläche des Quadrats HGEF zwei Terme gefunden. Damit sind die beiden Terme identisch, d.h.

$a^2 + b^2 = c^2$

q.e.d.

3.2 Der Kathetensatz



In dem obenstehenden Dreieck gilt:
Die Seite c wird durch die Höhe von C auf c in die Hypotenusenabschnitte p und q unterteilt.
=> c=p+q

Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den obenstehenden Bezeichnungen gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

Zusammenhang mit dem Hauptsatz:

$$a^2 + b^2 = (cp) + (cq)$$

$$a^2 + b^2 = cp + cq$$

$$a^2 + b^2 = c(p + q)$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot c$$

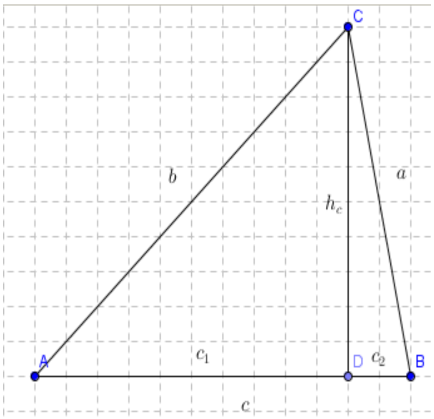
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Aus dem Kathetensatz kann man wie oben gezeigt den Hauptsatz des Pythagoras ableiten.

Stoff für die Schulaufgabe:
- Rechnen mit Wurzeln (Aus der Ex)
- Rationalmachen des Nenners
- Aufgaben mit allgemeinen Wurzeln
- Graphische Näherung für Wurzelzahlen
- Hauptsatz des Pythagoras

Aufgaben zur Vertiefung

Aufgabe:



In dem oben stehenden Dreieck ist die Seite $c_1 = 5cm$ Und c=8cm. Die Höhe auf die Seite c hat die Länge 6cm.
Berechne die Seitenlängen von a und b sowie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Lösung:
Aufgrund der gegeben Höhe auf die Seite c entstehen mit den Dreiecken ADC und DBC zwei rechtwinklige Teildreiecke des Dreiecks ABC.
=> in den Teildreiecken kann man den Hauptsatz des Pythagoras anwenden:

$$c_1^2 + h_c^2 = b^2 \Rightarrow (5cm)^2 + (6cm)^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = 61cm^2 \Rightarrow b = \sqrt{61}cm = 7{,}81cm$$

$$c_2^2 + h_c^2 = a^2 \Rightarrow (3cm)^2 + (6cm)^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{45}cm = 3cm\sqrt{5} = 6{,}71cm$$

Berechnung des Flächeninhalts von Dreieck ABC:

$$A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2} \cdot 8cm \cdot 6cm = 24cm^2$$

Berechne, welchen prozentualen Anteil der Flächeninhalt des Dreicks DBC an dem Dreieck ABC hat.

1. Schritt Berechnung des Flächenhalt des Dreiecks DBC

$$A = \frac{1}{2}c_2 \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 3cm \cdot 6cm = 9cm^2$$

2. Schritt: Berechnung des Verhältnisses von dem Flächenhalt dem des Dreiecks DBC zu dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$\frac{A_{DBC}}{A_{ABC}} = \frac{9cm^2}{24cm^2} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Lösungen zur Stillarbeit:

$a^2 = \overline{BF}^2 + h_c^2 \Rightarrow a^2 = (4cm)^2 + (5cm)^2 \Rightarrow a = \sqrt{41}cm = 6{,}40cm$

$b^2 = \overline{AF}^2 + h_c^2 \Rightarrow b^2 = (3cm)^2 + (5cm)^2 \Rightarrow b = \sqrt{34}cm = 5{,}83cm$

$c = 3cm + 4cm = 7cm$

$A = \frac{1}{2} \cdot 5cm \cdot 7cm = 17{,}5cm^2$

$\frac{1}{2} de = 17{,}5cm^2$

$\frac{1}{2} \cdot 7cm \cdot e = 17{,}5cm^2 \Rightarrow e = 17{,}5cm^2 \cdot \frac{2}{7cm} = 5cm$

Hinweis zur Aufgabe c: