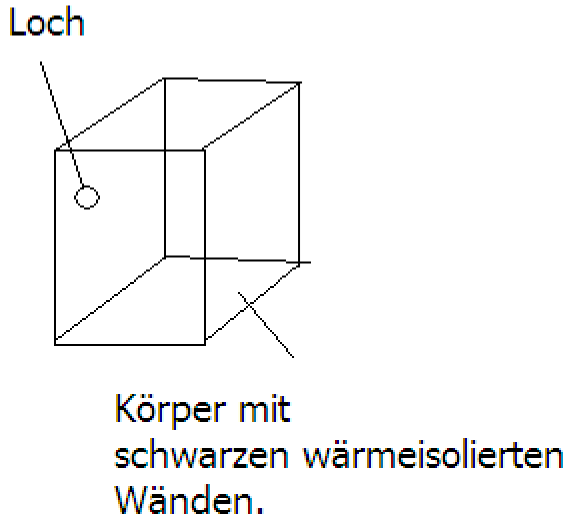
-1Einführung in die Quantentheorie

Nach Heisenbergs "Quantentheorie und Philosophie" besteht der Anfang der Quantenmechanik in der Beschreibung der Strahlung eines schwarzen Hohlkörpers. Die Forderung, dass diese Strahlung durch diskrete Energieniveaus zu beschreiben ist, stellt einen Bruch mit der klassischen Physik dar.

1.1 Das Planck' sche Wirkungsquantum

Versuch:



Der Körper absorbiert Energie in Form von Wärmestrahlung mit einem kontinuierlichem Spektrum. Da die absorbierte Strahlung mit der Strahlung, die durch das Loch emittiert wird, identisch ist, folgt dass auch die austretende Strahlung ein kontinuierliches Spektrum besitzt. (Kirchhoff 1850)

Problem: Diese Modellierung kann das Experiment nicht beschreiben.

Quantenhypothese:
Die Teilchen im inneren des Holraums werden zum Schwingen angeregt. Dabei erhalten sie mit der Zeit jeweils eine bestimmte Energie.

Definition:
Das Produkt aus Energie und Zeit legte Planck als Wirkung fest.

$$Wirkung = E \cdot \Delta t$$

$$[Wirkung] = 1\,\mathrm{Js}$$

Beispiel: Wirkungsaufnahme beim Sonnenbaden.

Wirkung der Sonne auf der Haut ist das Produkt aus der von der Sonne emittierten Energie und der Bestrahlungszeit.
Das Merkmal der Wirkung ist dabei die Bräunung der Haut, bei zu großer Wirkung der Sonnenbrand ;)
Die Wirkung wird dabei durch einen Photonenstrom auf die Haut übertragen. Dabei trägt jedes Photon eine minimale Wirkung.

Definition:
Die minimale Wirkung eines Photons wird mit dem Planck'schen Wirkungsquantum bezeichnet.

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

Jede Wirkung ist ein ganzzahliges Vielfaches des Planck'schen Wirkungsquantums. (Wirkung ist gequantelt)

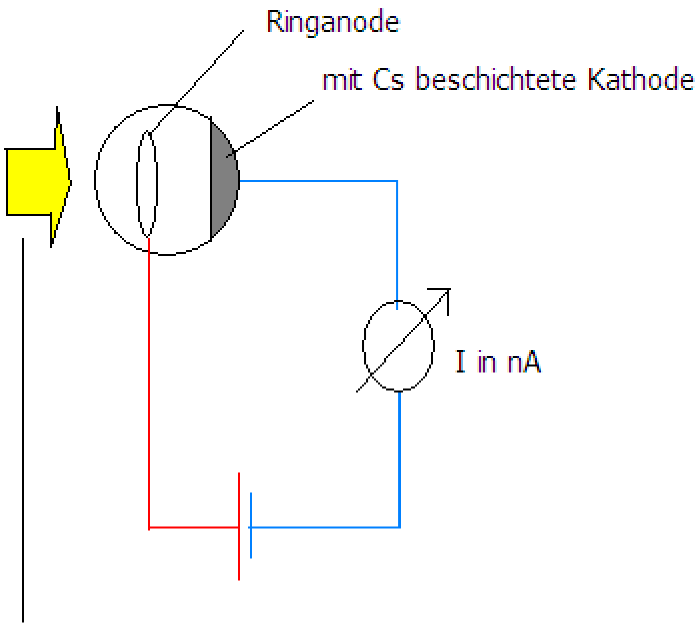
Bemerkung:
Die Quantelung der Wirkung bedeutet eine diskrete Energieübertragung.

1.2 Der photoelektrische Effekt

Die Auslösung von Elektronen aus Metallen unter dem Einfluss des Lichts wird als photoelektrischer Effekt bezeichnet.

Problematik aus der Historik:
Der Effekt hängt von der Lichtfrequenz ab und nicht wie in der klassischen Deutung erwartet von der Intensität der Bestrahlung.

Versuchsaufbau zum photoelektrischen Effekt:



Experimentelle Befunde:
1. Der photoelektrische Effekt setzt unmittelbar mit der Beleuchtung ein.
2. Bei verschiedenen Farbfiltern des Lichts wird eine unterschiedliche Stromstärke des ausgelösten Stroms erzeugt.

Gemeinsamkeit zur klassischen Physik:
Das Licht löst aus dem Kathodenmaterial die Elektronen aus. Die freien Elektronen werden von der Ringanode angezogen und so kommt ein Stromfluss zustande.

Unterschied bei der Deutung:
Die klassische Physik geht von einer kontinuierlichen Energieverteilung aus.

1.2.1 Widerlegung der kontinuierlichen Energieverteilung

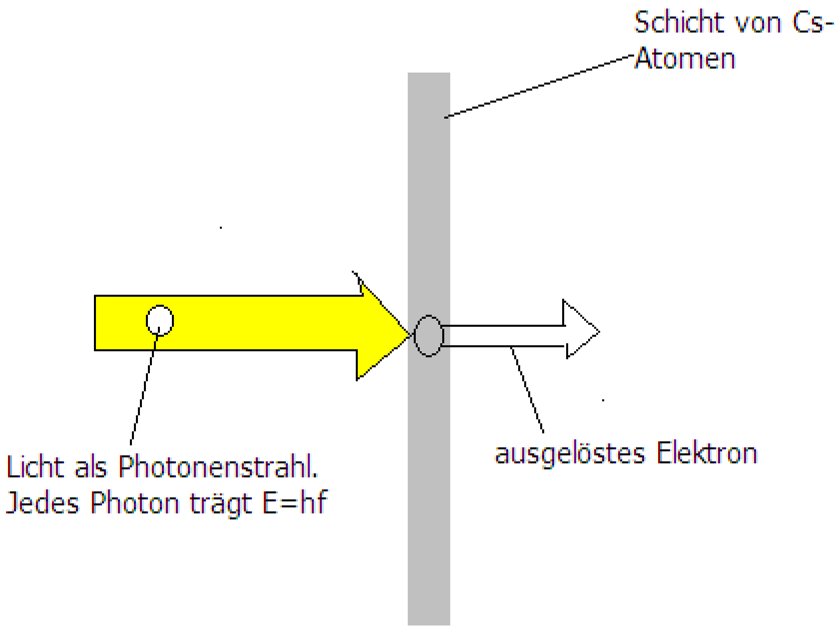
Planck'sches Gedankenexperiment
Bei einer Cs- beschichteten Photozelle muss man eine Arbeit von 2,00 eV (Elektronvolt) aufwenden, um ein Elektron auszulösen. Diese Photozelle wird mit einer Glühbirne der Leistung 2,00 W bestrahlt, die 5% ihrer elektrischen Leistung als Licht emittiert und von der Photozelle einen Abstand von 1,00 m hat.

Ziel des Experimentes:
Berechnung der Zeitverzögerung, bis der photoelektrische Effekt einsetzt, wenn die bestrahlte Fläche eines Cs- Atoms der Photozelle $1{,}00 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{cm}^2$ beträgt.

Die kontinuierliche Energieabstrahlung besagt, dass die gesamt zur Verfügung stehende Leistung auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius r=1,00 m homogen verteilt ist.

1. Schritt: Berechnung der Kugeloberfläche:
$$A = 4r^2\pi = 4\cdot(100\,\text{cm})^2\cdot\pi = 1{,}26\cdot 10^5\,\text{cm}^2$$
2. Schritt: Bestrahlungsleistung eines Cs- Atoms
$$P_{Strahl} = \frac{1{,}00\cdot 10^{-17}\,\text{cm}^2}{1{,}26\cdot 10^5\,\text{cm}^2}\cdot 0{,}05\cdot 2{,}00\,\text{W} = 7{,}94\cdot 10^{-24}\,\text{W}$$
3. Schritt: Berechnung der Zeitdauer des Auslösevorgangs
$$t = \frac{E}{P_{Strahl}} = \frac{2{,}00\cdot 1{,}6022\cdot 10^{-19}\,\text{J}}{7{,}94\cdot 10^{-24}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}} = 40357\text{s} = 11{,}2\text{h}$$
Dieses Ergebnis steht im Widerspruch zur experimentellen Beobachtung.

Folgerung:
Die Energie des Lichts ist nicht kontinuierlich verteilt, sondern sie ist diskret verteilt. Das Licht transportiert die Energie in Form von Lichtquanten, die jeweils die Energie E=hf tragen. Die Lichtquanten werden als Photonen bezeichnet.



<u>Einstein's Deutung des Photoeffekts</u>
Die Energie des Lichts wird in Form von Photonen, von denen jedes die Energie E=hf besitzt, auf das Elektron des Cs- Atoms übertragen. Diese Energie wird einerseits dazu verwandt, dass man das Elektron aus dem Cs-Atom auslöst und zum anderen nach dem Auslösevorgang man das Elektron beschleunigt.
$$E_{vorher} = E_{nacher}$$
$$hf = E_{kin} + W_A$$

$$E_{kin} = hf - W_A$$

Einstein- Gleichung des Photoeffekts

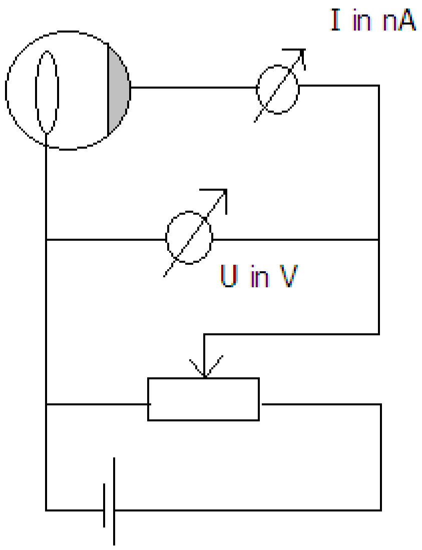
Leistungsfähigkeit dieser Deutung:

3. Der Photoeffekt setzt sofort ein, weil ein einziges Photon zum Auslösen eines Elektrons aus dem Cs- Atom ausreicht.
4. Die Energie des Elektrons nach dem Auslösen hängt von der Frequenz des eingesetzten Lichts ab.
5. Die Beleuchtungsstärke nimmt Einfluss auf die Anzahl der Photonen, nicht aber auf die kinetische Energie der Elektronen.

1.3 Experimenteller Nachweis der Einstein- Gleichung

Der Nachweis der Einstein- Gleichung gelang über die so genannte Gegenfeld-Methode:

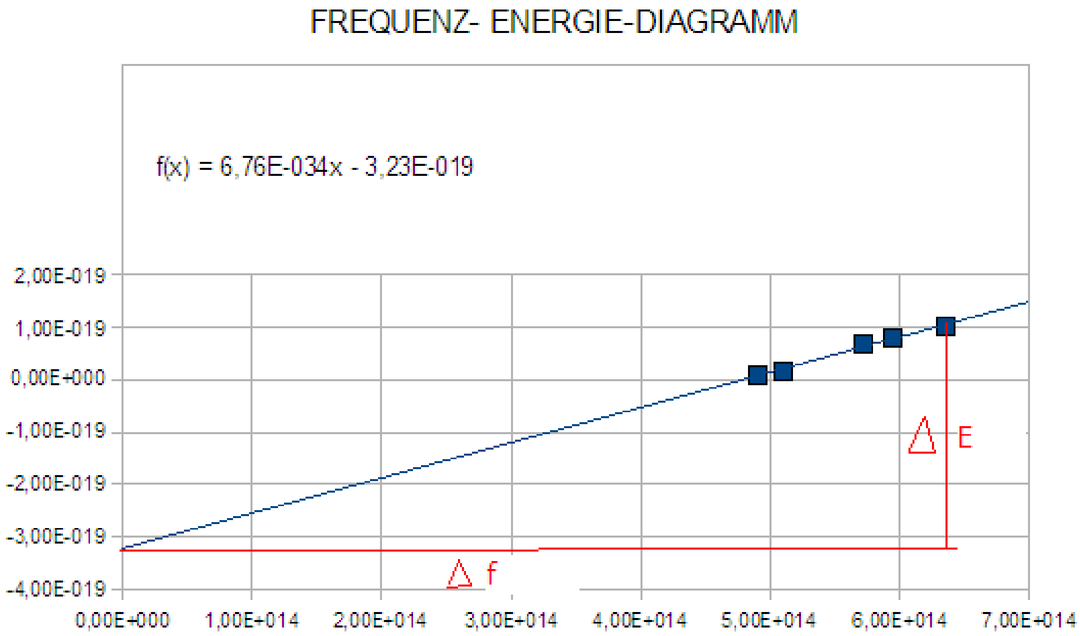
Versuchsaufbau:



Versuchsidee:

Man legt an die Ringanode einer Photozelle den negativen Pol der Stromquelle an. Durch die Bestrahlung mit Licht einer bestimmten Frequenz werden aus der Kathode der Photozelle Elektronen ausgelöst. Durch die negativ geladene Anode werden die Elektronen abgebremst, bis sie zum Stillstand kommen. Damit ist die Stromstärke des Photostroms 0. Aus der gemessenen Spannung, die das Gegenfeld aufbaut, kann man in diesem Zustand die kinetische Energie der Elektronen über die elektrische Energie bestimmen. Dies wird mit verschiedenfarbigen Licht wiederholt.

Messergebnis:



Der Graph in dem f-E- Diagramm ist eine Gerade, deren Schnittpunkt mit der Energieachse die Auslösearbeit aus dem Kathodenmaterial darstellt und der Schnittpunkt mit der x-Achse die Grenzfrequenz ist, oberhalb derer der Photoeffekt nachweisbar einsetzt.
Wenn die Einstein- Gleichung diesen Graphen beschreibt, dann muss die Steigung dem Planck'schen Wirkungsquantum entsprechen:

$$m = \frac{\Delta E}{\Delta f} = 6{,}76 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \approx \mathrm{h} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

$$\delta = \frac{6{,}76 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} - 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}} = 1{,}96\%$$

Einordnung des Photoelektrischen Effekts

- Es handelt sich um den zweiten Versuch, der erfolgreich mit der Quantenhypothese gedeutet wurde.
- Das Versagen der klassischen Deutung lässt sich mit Hilfe von einfachen Rechnungen erkennen.
- Man kann mit der Gegenfeldmethode das erste Mal das Plancksche Wirkungsquantum experimentell bestimmen. Die Gegenfeldmethode ist ein realisierbarer Versuch zur Bestätigung der Quantenhypothese.

1.4 Das Materienwellenkonzept von de Broglie

1.4.1 Historische und philosophische Einordnung des Konzepts in die Quantenmechanik

Die Deutung des Photoeffekts über die Photonen zeigt den Teilchencharakter des Lichts und deutet damit den Welle-Teilchen-Dualismus an.
1924 überträgt der französische Physiker de Broglie diesen Welle-Teilchen-Dualismus auf die Elektronen durch sein Materiewellenkonzept. Letztlich zeigt er damit, dass der Welle-Teilchen-Dualismus keine spezifische Erscheinung beim Licht ist.

1.4.2 Überblick über das Materienwellen- Konzept

Der Impuls eines Photons

Energie des Photons:

$E = mc^2$

$E = hf$

$\Rightarrow \; mc^2 = hf \Rightarrow \; m = \frac{hf}{c^2}$

Impuls eines Photons:

$$p = mc = \frac{hf}{c^2} \cdot c = \frac{hf}{c} = h \cdot \left(\frac{c}{f}\right)^{-1} = h\lambda^{-1} = \frac{h}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Impuls eins Photons

Aufgrund der Impulserhaltung und der Energie-Erhaltung ergibt sich:

$\frac{h}{\lambda} = mv \Rightarrow \; \lambda = \frac{h}{mv}$

Damit gilt:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

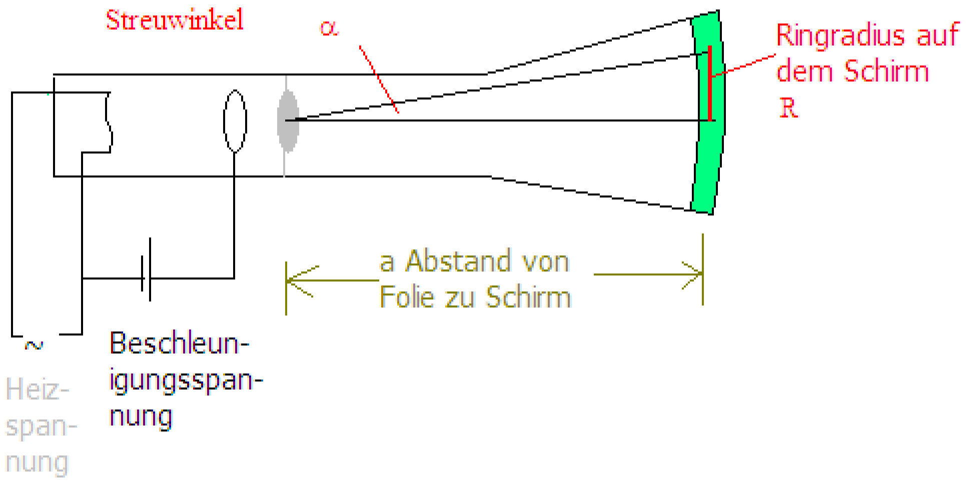
De- Broglie- Wellenlänge
der
Materienwelle

Für die Teilchen besteht ein analoger Zusammenhang zwischen Impuls und Wellenlänge wie für ein Photon.

1.4.3 Experimenteller Nachweis

Idee:
Ein Elektronenstrahl, der in einer Kathodenstrahlröhre erzeugt wird, soll zum Interferieren gebracht werden. Die Interferenz würde die Welleneigenschaften der Elektronen bestätigen.

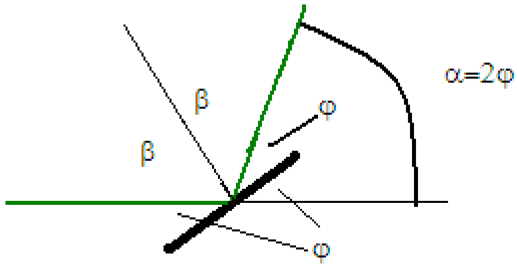
Versuchsaufbau:



Beobachtung:
Man erkennt auf dem Leuchtschirm hell aufleuchtende Ringe.

$\tan\alpha = \frac{R}{a}$

Zusammenhang mit dem Glanzwinkel:
Glanzwinkel ist der Winkel, unter dem ein Maximum beobachtet wird. Bragg-Bedingung sagt aus, dass die Reflexion am Gitter dann maximal ist, wenn der Kristall im Glanzwinkel gegen den einfallenden Elektronenstrahl gerichtet ist.



Mit dieser Überlegung ergibt sich:

$\tan(2\varphi) = \frac{R}{a} \Rightarrow 2\sin\varphi = \frac{R}{a}$

Maximabedingung am zweidimensionalen Gitter (11. Jahrgangsstufe)

$2d\sin\varphi = \lambda \Rightarrow 2\sin\varphi = \frac{\lambda}{d}$

Damit folgt:

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{R}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{R}{a}\cdot d$$

$$\lambda = \frac{1{,}5\cdot 10^{-2}m}{7{,}61\cdot 10^{-2}m}\cdot 1{,}3\cdot 10^{-10}m = 2{,}6\cdot 10^{-11}m$$

Wellenlängenbestimmung nach de Broglie:

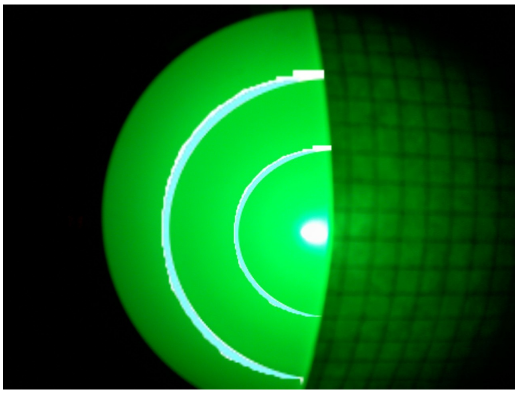
$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

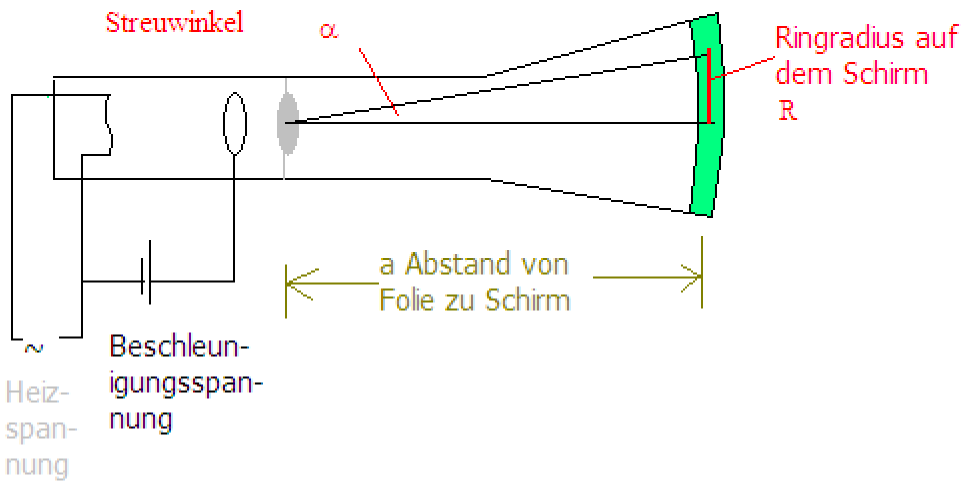
$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow \; v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot \sqrt{\frac{2eU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} Js}{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19} C \cdot 2{,}3 \cdot 10^3 V}} = 2{,}6 \cdot 10^{-11} m$$

Da die beiden Wellenlängen übereinstimmen, hat sich de Broglie's Materienwellen-Theorie bestätigt.

Wiederholung





$$\frac{R}{a} = \frac{m\lambda}{d}$$

m ist die Ordnungszahl

Übungsaufgaben zum de- Broglie- Wellenkonzept

Blatt Aufgabe 1

Gegeben:

$U = 1{,}50 \cdot 10^{3} V$

$R = 1{,}50 \cdot 10^{-2} m$

$a = 30{,}0 \cdot 10^{-2} m$

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$

Gesucht: Die Geschwindigkeit der Elektronen nach der Beschleunigung:

Lösung:

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU \Rightarrow \; v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19} C \cdot 1{,}50 \cdot 10^{3} V}{9{,}11 \cdot 10^{-31} kg}} = 2{,}29 \cdot 10^{7} \tfrac{m}{s}$$

Damit errechnet sich die de-Broglie-Wellenlänge der zugehörigen Materienwelle zu:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} Js}{9{,}11 \cdot 10^{-31} kg \cdot 2{,}29 \cdot 10^{7} \tfrac{m}{s}} = 3{,}18 \cdot 10^{-.11} m$$

Berechnung der Gitterkonstante:

Gegeben:

$\lambda = 3{,}18 \cdot 10^{-11} m$

$R = 1{,}50 \cdot 10^{-2} m$

$a = 3{,}00 \cdot 10^{-1} m$

Gesucht: d

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{a}{R} \Rightarrow \; d = \frac{a}{R}\lambda = \frac{3{,}00 \cdot 10^{-1} m}{1{,}50 \cdot 10^{-2} m} \cdot 3{,}18 \cdot 10^{-11} m = 6{,}36 \cdot 10^{-10} m$$

Die beobachtete Interferenz ist eine eindeutige Welleneigenschaft, die de Broglies These unterstützt, dass einem Elektron eine Welle zugeordnet werden kann. Zudem weist die aus der Gitterkonstante der Folie, dem Ringradius und dem Abstand der Folie zum Leuchtschirm gewonnen Wellenlänge die gleiche Größe auf wie die de Broglie Wellenlänge.

Nachdem man der Lichtwelle ein Teilchen - das Photon- zugeordnet hat, lag der Schluss nahe, dass ein Objekt des Mikrokosmos sowohl Wellen- wie Teilcheneigenschaften besitzen muss. Daher lag es nahe zu versuchen, eine Welle dem Elektron zuzuordnen.

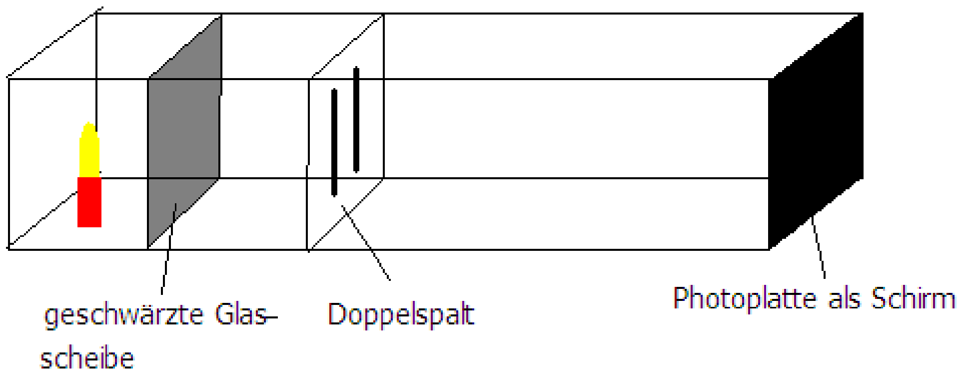
2. Statistische Aussagen der Quantenmechanik

2.1 Das Doppelspaltexperiment von Taylor

Ziel der Experimente von Taylor:

Es sollte die bekannte Doppelnatur des Lichts näher untersucht werden, um den bisher eher naiven Wellen-Teilchen-Dualismus wissenschaftlich fundiert zu erforschen. Damit sollte eine bessere Beschreibung der quantenmechanischen Phänomene erfolgen.

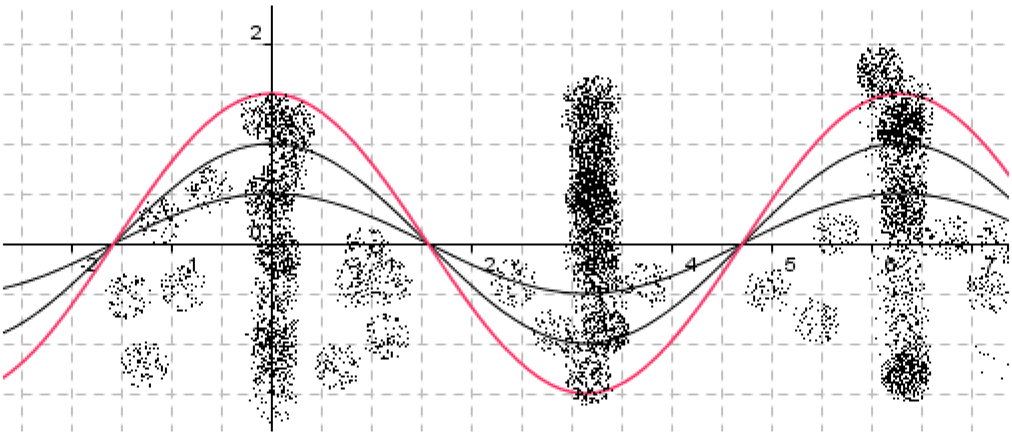
Versuchsaufbau:



Mit dieser Versuchsanordnung soll nun untersucht werden, ob das Interferenzmuster aufgrund von Wechselwirkungen vieler Photonen entsteht oder nicht.
Wenn dies so ist, dann dürfte auf der Photoplatte bei dieser Versuchsanordnung kein Interferenzmuster geben.

Fazit aus dem Versuch:
Das Interferenzmuster entsteht nicht aufgrund von Wechselwirkungen von vielen Photonen, die gleichzeitig durch den Spalt dringen.
Interpretation:
1.) Das Interferenzmuster ist nicht durch die gleichzeitige Wechselwirkung vieler Photonen erklärbar.
2.) Der Auftreffort eines Photons auf dem Schirm unterliegt einer statistischen Verteilung.
3.) Erst bei einer hinreichend großen Anzahl von Photonen ist eine Intensitäts-Verteilung erkennbar, die analog zu dem Interferenzmuster des Doppelspalt-Experimentes ist.

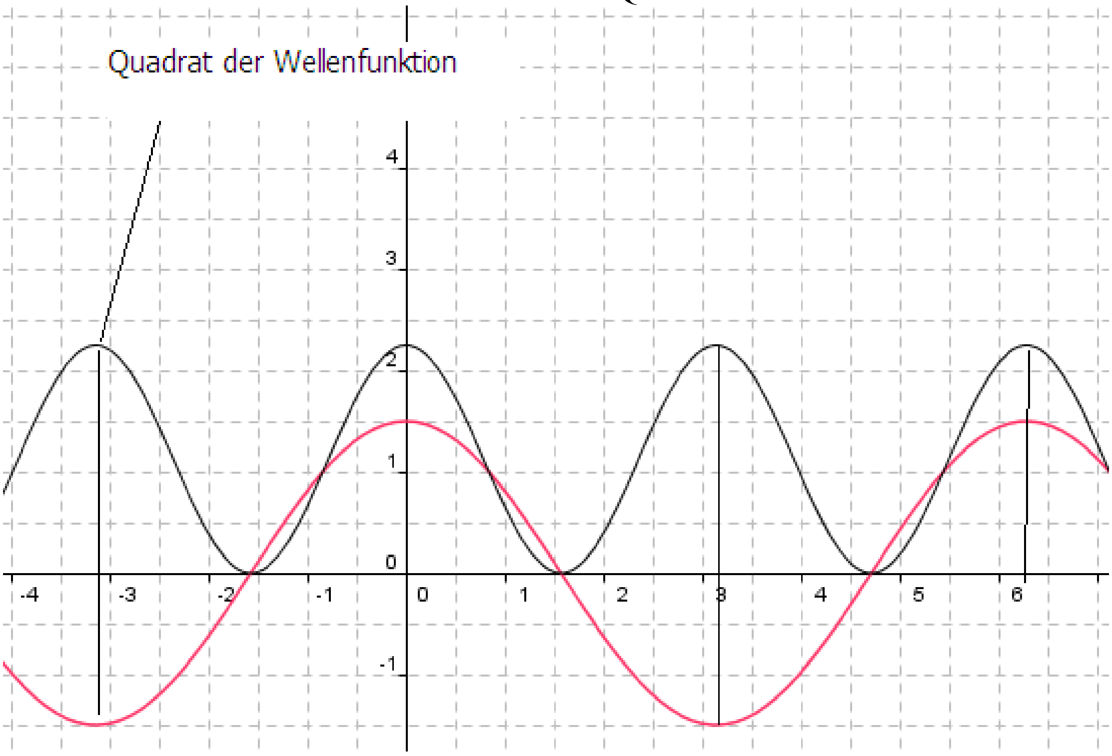
2.2 Wahrscheinlichkeitsdichte und Wellenfunktion
Punkt 3 der Interpretation legt nahe, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Photonen mit der Wellenfunktion der Interferenz in Bezug steht.



Die Wellenfunktion begrenzt die Wahrscheinlichkeit eines Photons, an einem bestimmten Ort auf dem Schirm aufzutreffen.

Problem:
Die Wellenfunktion ist als Maß für die Wahrscheinlichkeit der Photonen an einem bestimmten Ort ungeeignet, weil sie negative Werte zulässt, eine Wahrscheinlichkeit aber immer positiv sein muss nach der Definition aus den Axiomen von Komolgorow.

Lösung:
Man betrachtet anstelle der Wellenfunktion das Quadrat der Wellenfunktion:



Das Quadrat der Wellenfunktion hat an den gleichen Stellen die Nullstellen und die Extremstellen wie die Wellenfunktion und lässt nur positive Werte zu.

=> Das Quadrat der Wellenfunktion ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon an einem bestimmten Ort auftrifft.

$$P(x) = \Phi^2(x) \cdot \Delta x$$

Weil das Quadrat der Wellenfunktion nun die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein Photon in einem bestimmten Ortsintervall anzutreffen ist, wird das Quadrat der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte der Photonen definiert.

Für eine reelle Wellenfunktion gilt nach Max Born:

Das Quadrat der Wellenfunktion ist direkt proportional zur Wahrscheinlichkeit eines Photons in einem bestimmten Intervall aufzutreffen.

Bedeutung:
Die Wahrscheinlichkeitsthese von Max Born verbindet die Wellenfunktion mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Photonen. Damit ist die naive Sicht auf den Wellen- Teilchen-Dualismus zu Ende.

Beispiel zur Wahrscheinlichkeitsverteilung

Max Born beschrieb die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch

$P(\Delta x) = \varphi^2(x) \cdot \Delta x$

Dabei handelt es sich um eine so genannte normierte Wellenfunktion.

Aufgabe

Bei einem Doppelspaltexperiment besitzt der Doppelspalt ein Spaltabstand von 5,00µm. Durch ihn werden Photonen geschossen, die sichtbares Licht der Wellenlänge 589 nm emittieren. Im Abstand von 1,00 m zum Doppelspalt treffen die Photonen auf einem quadratischen Schirm der Kantenlänge 70,0cm auf. Die Photonen treffen alle auf einer waagrechten Geraden in der Schirmmitte auf.
Zeige, dass im Minímum des Interferenzmusters die Auftreffwahrscheinlichkeit der Photonen 0 ist.
Dabei ist die stationäre Wellenfunktion gegeben durch:

$$\varphi(x) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}\right)$$

1. Schritt: Normierung dieser Wellenfunktion:
Dazu wird die Wahrscheinlichkeit betrachtet, dass ein Photon an irgendeinem beliebigen Punkt der Gerade auftrifft.
=> Diese Wahrscheinlichkeit hat den Wert 1
=> Die Wahrscheinlichkeitsdichte hat den Wert 1:
Normierte Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\varphi(x) = k\cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda})$$

$$\varphi(l) = k\cos\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi^2(l) = k^2\cos^2\left(2\pi \cdot \frac{l}{\lambda}\right)$$

$$P(l) = k^2\underbrace{\cos^2\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)}_{=1} \cdot l = 1$$

$$k^2 \cdot l = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

2. Schritt: Berechnung des Standort des Minimums erster Ordnung:

Interferenzbedingung für die Minimum erster Ordnung:

$$d\sin\alpha = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{589\cdot 10^{-9}m}{2\cdot 5{,}00\cdot 10^{-6}m} \Rightarrow \alpha = 3{,}38^\circ$$

Ort des Minimums auf dem Schirm:

$$\tan\alpha = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\tan\alpha \Rightarrow x = 1{,}00m\cdot\tan 3{,}38^\circ = 0{,}0590m = 5{,}90cm$$

3. Schritt: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nach Born:

$$P(x = 5{,}90cm) = \frac{1}{70cm}\cdot\cos^2\left(2\pi\cdot\frac{5{,}90cm}{589\cdot 10^{-7}cm}\right)\cdot 5{,}90cm = 0{,}0031 \approx 0{,}3\%$$

Damit ist es sehr unwahrscheinlich ein Photon am Ort des Minimums

2.3 Die Unschärferelation von Heisenberg

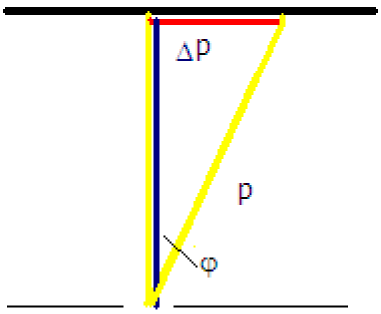
Informationen zu Werner Heisenberg (1901-1976)

- Mitarbeiter von Nils Bohr und Mitverfasser der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik
- Hauptbeitrag von Heisenberg in der Quantenmechanik war die statistische Deutung von Quantenphänomenen und eine Deutung des Bahnbegriffs
- 1932 erhielt Heisenberg den Nobelpreis
- 1939-1945 Leiter des deutschen Uranprojekts
- 1945 Internierung in Großbritannien
- Ab 1946 bis 1976 Professor für theoretische Physik an verschiedenen Universitäten, zuletzt an der LMU in München.

Computersimulation:
Man beschießt einen Einfachspalt mit Photonen. Auf dem Schirm der Simulation beobachtet man den theoretischen Verlauf bei variierender Spaltbreite.

Beobachtung:
Je mehr die Spaltbreite verkleinert wird, desto breiter wird die Abbildung des Spalts auf dem Schirm.

Deutung:
Die Photonen besitzen bei dem Durchgang durch den Spalt einen Impuls, der sich gemäß der untenstehenden Abbildung in zwei Richtungskomponenten aufteilt:



Die eine Impulskomponente steht senkrecht zum Schirm, die zweite ist parallel zur Breite des Schirms. Δp heißt dabei Streuimpuls oder Impulsunschärfe.

Je kleiner die Spaltbreite gewählt wird, desto größer wird die Impulsunschärfe auf dem Beobachtungsschirm. (qualitative Deutung)

Quantitative Deutung der Impulsunschärfe
Aus der obenstehenden Abbildung folgert man:

$$\frac{\Delta p}{p} = \sin\varphi$$

Andererseits gilt, wenn man das Maximum erster Ordnung betrachtet:

$d \cdot \sin\varphi = \lambda \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\lambda}{d} \approx \frac{\lambda}{\Delta x}$ (1)

Nach de Broglie kann man die Wellenlänge bestimmen durch:

$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$

Setzt man dies nun in (1) ein, dann folgt:

$\sin\varphi = \frac{h}{p \cdot \Delta x}$

Da man nun zwei Beziehungen für den Sinus des Streuwinkels bestimmt hat, gilt:

$\frac{\Delta p}{p} = \frac{h}{p\Delta x}$

$\Delta p = \frac{h}{\Delta x}$

$\Delta p \cdot \Delta x = h$

Die letzte Gleichung kann wie folgt interpretiert werden:
Das Produkt aus Ortsunschärfe und Impulsunschärfe liefert den Wert h.
Deshalb kann man die Ortsunschärfe und die Impulsunschärfe nicht gleichzeitig beliebig minimieren, weil beispielsweise die Minimierung der Impulsunschärfe eine Maximierung der Ortsunschärfe bedingt. Dies wird in der Quantenmechanik beschrieben durch die

Heißenberg'sche Unschärferelation

Werden quantenmechanische Objekte so präpariert, dass ihre Ortsmesswerte eine kleine Streuung aufweisen, dann besitzen sie eine große Impulsunschärfe:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$$

Beispiel:

Ein Elektron bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v = 1{,}50 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$ Es besitzt die Masse $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Bestimme die Ortsunschärfe für dieses Elektron.

Lösung:
Ansatz mit der Heisenbergschen Unschärferelation:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

$$\Delta x \geq \frac{h}{2\pi\Delta p} = \frac{h}{2\pi \cdot m\Delta v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Nms}{2\pi \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}50 \cdot 10^5\, Ns} = 7{,}72 \cdot 10^{-10}\, m$$

Die Ortsunschärfe beträgt in etwa das 100 000 fache des Elektronendurchmessers.

Heisenbergsche Unschärferelation und Bahnbegriff

$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$

Unter der Bahn eines Objekts versteht man die Ortskurve, auf der sich ein Gegenstand bewegt.

Beispiel: Waagrechter Wurf.

Die Ortskurve wird durch die Bahngleichung $y = f(x) = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$

Bahngeschwindigkeit: $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$

Bahnimpuls: $p = mv = m\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} = m\sqrt{v_o^2 + g^2 \cdot \frac{x^2}{v_0^2}}$

Genauigkeit der Bestimmung von Ort und Impuls:

Ÿ Für die Ortskurve kann man die Anfangshöhe, die Anfangsgeschwindigkeit und die x-Koordinate mit einer bestimmten Genauigkeit messen. Daher besitzt auch die y-Koordinate diese Genauigkeit.

Ÿ Da in der Formel für den Bahnimpuls die gleichen Anfangswerte maßgeblich sind, ist auch die größe des Bahnimpulses in dieser Genauigkeit festlegbar.

Ÿ Deshalb kann man in diesem Fall gleichzeitig Impuls und Ort mit der gleichen Genauigkeit bestimmen.

Im mikroskopischen Fall gilt: $\Delta p \approx \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x}$

Damit der Impuls möglichst genau bestimmt werden kann, muss die Impulsunschärfe möglichst klein sein, Das bedeutet aber, dass der Wert des Bruchs möglichst klein ist und aus diesem Grund die Ortsunschärfe groß ist.

=> Eine gleichzeitige Bestimmung von Ort und Impuls mit beliebiger Genauigkeit ist unmöglich. Dies widerspricht dem klassischen Bahnbegriffs.

e) Heisenbergsche Unschärferelation für die Kathodenstrahlröhre

Gegeben

$d = 2{,}00 \cdot 10^{-6} m$

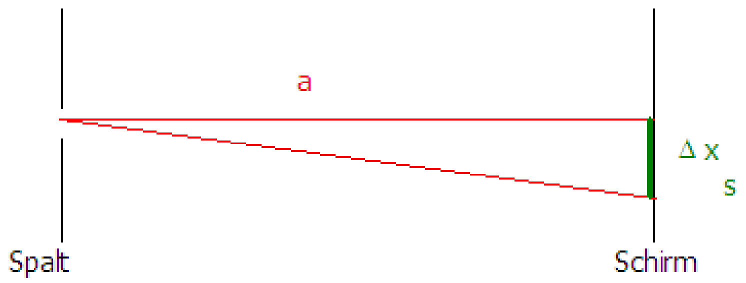
$U = 1{,}00 \cdot 10^{3} V$

$a = 15{,}0 \cdot 10^{-2} m$

Gesucht:

Δx_S

Prinzipsskizze:



Beim Durchgang durch den Spalt ergibt sich eine Ortsunschärfe von 2,00µm.

1. Schritt: Berechnung der Impulsunschärfe nach Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p = h \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{\Delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} Js}{2{,}00 \cdot 10^{-6} m} = 3{,}32 \cdot 10^{-28} \frac{Nms}{m} = 3{,}32 \cdot 10^{-28} Ns$$

$$\Delta p = m \cdot \Delta v \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{3{,}32 \cdot 10^{-28} kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot s}{9{,}11 \cdot 10^{-31} kg} = 364 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v = 364 \frac{m}{s}$$

2. Schritt: Berechnung der Endgeschwindigkeit der Elektronen nach der Beschleunigung

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}00 \cdot 10^3 kg \cdot \frac{m^2}{s^2}}{9{,}11 \cdot 10^{-31} kg}} = 1{,}88 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$$

3. Schritt: "Flugzeit" der Elektronen vom Spalt zum Schirm:
Nach der Beschleunigungsphase bewegen sich die Elektronen mit konstanter Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow vt = s \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{a}{v} = \frac{15{,}0 \cdot 10^{-2} m}{1{,}88 \cdot 10^7 \frac{m}{s}} = 7{,}98 \cdot 10^{-9} s$$

4. Schritt: Berechnung der Ortsunschärfe am Schirm:

$$\Delta x_s = \Delta v \cdot t = 364 \frac{m}{s} \cdot 7{,}98 \cdot 10^{-9} s = 2{,}90 \cdot 10^{-6} m$$

$$2 \Delta x_s = 5{,}80 \cdot 10^{-6} m$$

Vorgehensweise bei einer derartigen Aufgabe:

1.) Spaltbreite bzw. Spaltabstand beim Doppelspalt entspricht der Ortsunschärfe am Start der Beobachtung
=> Berechnung der Impulsunschärfe mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

=> Über die Definition der Impulsänderung wird die Streugeschwindigkeit berechnet.

2.) Über die Energieerhaltung wird die Bewegungsgeschwindigkeit der Elektronen bestimmt.

3.) Mit der Bewegungsgeschwindigkeit der Elektronen wird die Flugzeit ermittelt.

4.) Mit der Flugzeit wird die Ortsunschärfe auf dem Schirm über die Streugeschwindigkeit ermittelt.

Hinweis zur Aufgabe 2)

Abschätzung der Photonenmasse über den Impuls:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$mc = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow m = \frac{h}{\lambda c}$$

Ein Photon bewegt sich mit der Lichtgeschwindigkeit c, d.h. Schritt 2 des Schemas entfällt.

Hausaufgabe: Aufgabe 2 unter Berücksichtigung des Hinweises rechnen.
Aufgrund des Abschätzungschrakters darf klassisch gerechnet werden.

Wichtige Gesetze der Quantenmechanik

$E_{kin} = hf - W_A$ **(Einsteingleichung des photoelektrischen Effekts)**

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E_{Photon} = hf$$